

Wykład z analizy

TYDZIEŃ 10 I 11.

RÓŻNICZKOWANIE FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

10.1 Niech $f(x, y)$ będzie funkcją dwóch zmiennych, i niech druga współrzędna będzie ustalona $y = y_0$. Rozważana funkcja zależy tylko od x , a więc jest funkcją jednej zmiennej. Załóżmy, że powstała w ten sposób funkcja jest różniczkowalna w punkcie x_0 , czyli że istnieje granica ilorazu różnicowego

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Granice tę nazywamy *pochodną cząstkową* funkcji $f(x, y)$ *względem zmiennej x* w punkcie (x_0, y_0) . Oznaczamy ją

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{lub} \quad f_x.$$

Tak więc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Pochodna cząstkowa względem drugiej zmiennej określona jest podobnie

$$\frac{\partial f}{\partial y} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}.$$

Pochodne cząstkowe są więc pochodnymi funkcji jednej zmiennej, i obliczamy je używając metod poznanych na kursie analizy funkcji jednej zmiennej. Należy zawsze pamiętać która zmienna jest ustalona, i ma być traktowana jako stała, a która jest „zmienną całkowania”.

10.2 Przykład: Policzmy pochodne cząstkowe funkcji $f(x, y) = \sin(x^2 + y)$ w punkcie $(0, \pi)$.

$$\frac{\partial \sin(x^2 + y)}{\partial x} = 2x \cos(x^2 + y), \quad \frac{\partial \sin(x^2 + y)}{\partial y} = \cos(x^2 + y).$$

Wstawiając $x = 0$, $y = \pi$ otrzymujemy, że pochodne cząstkowe są równe odpowiednio 0 i -1 .

10.3 Funkcja może mieć pochodne cząstkowe w jakimś punkcie, i nie być w nim nawet ciągła. Niech

$$f(x, y) = 0, \text{ dla } xy = 0, \quad f(x, y) = 1, \text{ dla } xy \neq 0.$$

Łatwo zauważyć, że obie pochodne istnieją w punkcie $(0, 0)$, i że $f(x, y)$ nie jest w tym punkcie ciągła.

10.4 Niech funkcja $f(x, y)$ będzie określona w otoczeniu punktu (x_0, y_0) i ma w tym otoczeniu obie pochodne cząstkowe, które w dodatku są funkcjami ciągłymi (x, y) . Wtedy mówimy, że $f(x, y)$ jest *różniczkowalna w sposób ciągły* w otoczeniu (x_0, y_0) . Większość funkcji dwóch zmiennych pojawiających się w zastosowaniach to funkcje różniczkowalne w sposób ciągły. Dla takich funkcji prawdziwe jest następujące twierdzenie

Twierdzenie (o przybliżaniu funkcją liniową). Niech $f(x, y)$ będzie różniczkowalna w sposób ciągły w otoczeniu punktu (x_0, y_0) , a z_0 , a i b będą wartościami f i jej pochodnych cząstkowych w (x_0, y_0) :

$$z_0 = f(x_0, y_0), \quad a = f_x(x_0, y_0), \quad b = f_y(x_0, y_0).$$

Wtedy $f(x, y)$ można zapisać jako

$$f(x, y) = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0) + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} r(x, y),$$

gdzie

$$r(x, y) \text{ jest funkcją ciągłą w } (x_0, y_0) \text{ i } r(x_0, y_0) = 0.$$

Zauważmy, że funkcja

$$z = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

jest funkcją liniową zmiennych x, y . Twierdzenie mówi więc, że funkcję różniczkowalną w sposób ciągły można w otoczeniu punktu (x_0, y_0) przybliżać funkcją liniową. $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} r(x, y)$, czyli błąd tego przybliżenia jest mały, mniejszy niż odległość punktu (x, y) od punktu (x_0, y_0) . Zauważmy, że z twierdzenia wynika, że $f(x, y)$ jest ciągła w punkcie (x_0, y_0) . Wykres funkcji liniowej

$$z = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

jest płaszczyzną, jest to tak zwana *płaszczyzna styczna* do wykresu funkcji $f(x, y)$ w punkcie $P = (x_0, y_0, z_0)$. Prosta prostopadła do płaszczyzny stycznej, przechodząca przez punkt P nazywa się *normalną* wykresu $f(x, y)$ w punkcie P . Normalna wykresu ma reprezentację parametryczną

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 - t,$$

gdzie z_0, a, b mają takie znaczenie, jak w twierdzeniu, czyli z_0 jest wartością a a i b są wartościami pochodnych cząstkowych funkcji $f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0) .

10.5 Przykład: Znajdziemy równanie płaszczyzny stycznej do sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 29$ w punkcie $(2, 3, 4)$. Górna czasza sfery jest wykresem funkcji

$$z = \sqrt{29 - x^2 - y^2}.$$

Funkcja ta jest różniczkowalna w sposób ciągły w obszarze $x^2 + y^2 < 29$. Obliczamy z_0 , a i b .

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{29 - 2^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4, \\ a &= \left. \frac{\partial \sqrt{29 - x^2 - y^2}}{\partial x} \right|_{x=2, y=3} = \left(-\frac{x}{\sqrt{29 - x^2 - y^2}} \right) \Big|_{x=2, y=3} = -\frac{1}{2}, \\ b &= \left. \frac{\partial \sqrt{29 - x^2 - y^2}}{\partial y} \right|_{x=2, y=3} = \left(-\frac{y}{\sqrt{29 - x^2 - y^2}} \right) \Big|_{x=2, y=3} = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Wstawiając do wzoru otrzymujemy równanie płaszczyzny stycznej:

$$z = 4 - \frac{1}{2}(x - 2) - \frac{3}{4}(y - 3),$$

czyli

$$2x + 3y + 4z - 29 = 0.$$

10.6 Reguła łańcuchowa, czyli wzór na różniczkowanie funkcji złożonej jest podobna, chociaż trochę bardziej skomplikowana, do reguły łańcuchowej dla funkcji jednej zmiennej. Niech będą dane trzy funkcje

$$z = F(x, y), \quad x = \phi(u, v), \quad y = \psi(u, v),$$

i utwórzmy funkcję złożoną

$$z = F(\phi(u, v), \psi(u, v)).$$

Twierdzenie (reguła łańcuchowa). Niech $F(x, y)$ będzie różniczkowalna w sposób ciągły w otoczeniu punktu (x_0, y_0) , a $\phi(u, v)$ i $\psi(u, v)$ różniczkowalne w sposób ciągły w otoczeniu punktu (u_0, v_0) , przy czym $\phi(u_0, v_0) = x_0$, i $\psi(u_0, v_0) = y_0$. Wtedy funkcja złożona $z = F(\phi(u, v), \psi(u, v))$ jest różniczkowalna w sposób ciągły w otoczeniu punktu (u_0, v_0) , oraz

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

gdzie pochodne cząstkowe względem u i v obliczone są w punkcie (u_0, v_0) , a pochodne cząstkowe względem x i y w punkcie (x_0, y_0) .

Regułę łańcuchową możemy zapisać krótko

$$z_u = F_x x_u + F_y y_u, \quad z_v = F_x x_v + F_y y_v.$$

10.7 Przykład: Niech $F(x, y) = e^{xy}$, $\phi(u, v) = u^2$ i $\psi(u, v) = uv$. Obliczamy

$$F_x(x, y) = ye^{xy}, \quad F_y(x, y) = xe^{xy}, \quad \phi_u(u, v) = 2u, \quad \phi_v(u, v) = 0, \quad \psi_u(u, v) = v, \quad \psi_v(u, v) = u.$$

Niech $z(u, v) = F(\phi(u, v), \psi(u, v))$, i podstawiamy do wzoru

$$\begin{aligned} z_u(u, v) &= ye^{xy} 2u + xe^{xy} v = uve^{u^3v} 2u + u^2 e^{u^3v} v = 3u^2 v e^{u^3v}, \\ z_v(u, v) &= ye^{xy} \cdot 0 + xe^{xy} u = u^3 e^{u^3v}. \end{aligned}$$

10.8 Regułę łańcuchową możemy zastosować w szczególnym przypadku, gdy ϕ i ψ zależą od tylko jednej zmiennej $\phi(s)$ i $\psi(s)$. Wtedy funkcja złożona $z = F(\phi(s), \psi(s))$ jest funkcją jednej zmiennej oraz

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{ds},$$

czyli

$$z'(s) = F_x(\phi(s), \psi(s))\phi'(s) + F_y(\phi(s), \psi(s))\psi'(s).$$

Pochodna ta to prędkość zmian funkcji $F(x, y)$, gdy punkt (x, y) porusza się po krzywej $(\phi(s), \psi(s))$. Jeżeli krzywa ta to prosta

$$x(s) = x_0 + s \cos \theta, \quad y(s) = y_0 + s \sin \theta,$$

(czyli prosta przechodząca przez punkt (x_0, y_0) , o kącie nachylenia θ , sparametryzowana długością łuku od punktu (x_0, y_0)), to pochodna $z'(s)$ w punkcie $s = 0$ to prędkość zmian funkcji $F(x, y)$ w kierunku θ . Nazywamy ją *pochodną kierunkową funkcji $F(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0) w kierunku $(\cos \theta, \sin \theta)$* . Obliczając pochodną kierunkową, z reguły łańcuchowej, otrzymujemy

$$z'(s) = F_x(x_0 + s \cos \theta, y_0 + s \sin \theta) \cos \theta + F_y(x_0 + s \cos \theta, y_0 + s \sin \theta) \sin \theta,$$

czyli

$$z'(0) = F_x(x_0, y_0) \cos \theta + F_y(x_0, y_0) \sin \theta.$$

Funkcja przyporządkowująca każdemu punktowi (x, y) wektor $(F_x(x, y), F_y(x, y))$ (jest to funkcja dwóch zmiennych o wartościach wektorowych) nazywa się *gradientem funkcji $F(x, y)$*

$$\text{grad } F = (F_x, F_y).$$

Przypominając sobie pojęcie iloczynu skalarnego zauważmy, że pochodna kierunkowa $F(x, y)$ w kierunku $\mathbf{u}$ to iloczyn skalarny

$$\langle \text{grad } F, \mathbf{u} \rangle.$$

Wartość tego iloczynu skalarnego wynosi $|\text{grad } F||\mathbf{u}| \cos \alpha$, gdzie α jest kątem pomiędzy wektorami $\text{grad } F$ i $\mathbf{u}$. Jak widać, w danym punkcie wartość pochodnej kierunkowej jest największa w kierunku dla którego $\cos \alpha = 1$, czyli dla kierunku gradientu. Tak więc gradient wskazuje kierunek najszybszego wzrostu. Wartość tego najszybszego wzrostu, czyli największa wartość pochodnej kierunkowej w danym punkcie to

$$|\text{grad } F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}.$$

Punkty w których gradient jest wektorem zerowym nazywają się *punktami krytycznymi* funkcji.

10.9 Przykład: Niech $F(x, y) = x^2y - 2x - y$. Znajdziemy gradient, punkty krytyczne, wektor jednostkowy wskazujący kierunek najszybszego wzrostu w punkcie $(3, 1)$ i pochodną kierunkową w punkcie $(3, 1)$ w kierunku $(\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4})$. Obliczamy $F_x(x, y) = 2xy - 2$, $F_y(x, y) = x^2 - 1$. Otrzymujemy

$$\text{grad } F(x, y) = (2xy - 2, x^2 - 1).$$

W punkcie krytycznym obie współrzędne gradientu muszą być zerami, a więc $x^2 = 1$ i $xy = 1$. Otrzymujemy więc dwa punkty krytyczne $(1, 1)$ i $(-1, -1)$.

$$\text{grad } F(3, 1) = (4, 8).$$

Dzieląc ten wektor przez jego długość otrzymujemy wektor jednostkowy wskazujący w tym samym kierunku

$$\frac{1}{\sqrt{4^2 + 8^2}}(4, 8) = \frac{1}{4\sqrt{5}}(4, 8) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2).$$

Obliczamy iloczyn skalarny gradientu i zadanego kierunku w punkcie $(3, 1)$

$$\langle (4, 8), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle = \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}.$$

10.10 Kiedy staramy się sobie wyobrazić wykres danej funkcji $F(x, y)$ pomocnym narzędziem są poziomice. Są to krzywe, na których wartość funkcji jest stała. Załóżmy, że przez punkt (x_0, y_0) na płaszczyźnie przechodzi poziomica $(\phi(t), \psi(t))$, i punkt (x_0, y_0) odpowiada wartości parametru t_0 . Jest to typowa sytuacja, można udowodnić (jeżeli pochodne cząstkowe funkcji są różniczkowalne w sposób ciągły), że przez każdy punkt płaszczyzny, nie będący punktem krytycznym $F(x, y)$ przechodzi dokładnie jedna poziomica. Czyli mamy

$$F(\phi(t), \psi(t)) = c.$$

Różniczkujemy obie strony, i podstawiamy $t = t_0$

$$F_x(x_0, y_0)\phi'(t_0) + F_y(x_0, y_0)\psi'(t_0) = 0.$$

Widzimy więc że wektor styczny do poziomicy $(\phi'(t), \psi'(t))$ jest zawsze prostopadły do gradientu $(F_x(x, y), F_y(x, y))$. Jest to analityczny dowód faktu intuicyjnie oczywistego: kierunek najszybszego wzrostu jest prostopadły do poziomicy.

10.11 Pojęcie pochodnej cząstkowej przenosi się w sposób oczywisty na funkcje dowolnej liczby zmiennych. Na przykład, funkcję trzech zmiennych $f(x, y, z)$ można różniczkować względem trzech zmiennych, i otrzymujemy trzy pochodne cząstkowe, oznaczane f_x , f_y , f_z . Zachodzi odpowiednik reguły łańcuchowej. Jeżeli n funkcji m zmiennych złożymy z funkcją n zmiennych

$$z = F(\phi_1(u_1, \dots, u_m), \dots, \phi_n(u_1, \dots, u_m)),$$

to zachodzi wzór

$$\frac{\partial z}{\partial u_j} = \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_j} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial u_j} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial \phi_n}{\partial u_j},$$

dla wszystkich $j = 1, \dots, m$ (oczywiście przy odpowiednim założeniu różniczkowalności funkcji składowych).

10.12 W przypadku funkcji trzech zmiennych $f(x, y, z)$ gradient (f_x, f_y, f_z) jest wektorem trójwymiarowym. Podobnie jak w przypadku funkcji dwóch zmiennych możemy wprowadzić pojęcie poziomicy. W tym wypadku nie będzie to krzywa a powierzchnia, i będzie zawsze prostopadła do gradientu (to znaczy płaszczyzna styczna do poziomicy będzie prostopadła do gradientu).

10.13 Różniczkując pochodne cząstkowe ponownie otrzymujemy pochodne cząstkowe *drugiego rzędu*. W przypadku funkcji dwóch zmiennych możliwe są następujące kombinacje

$$(F_x)_x, \quad (F_x)_y, \quad (F_y)_x, \quad (F_y)_y,$$

oznaczane po prostu przez F_{xx} , F_{xy} , F_{yx} , F_{yy} . Stosowane są też oznaczenia „ułamkowe”

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

Twierdzenie (równość pochodnych mieszanych). *Jeżeli funkcja dwóch zmiennych $f(x, y)$ ma wszystkie pochodne cząstkowe rzędu 2, i są one wszystkie funkcjami ciągłymi, to*

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

Różniczkując funkcję n razy, względem różnych zmiennych, otrzymujemy różne pochodne cząstkowe rzędu n . Jak wynika z powyższego twierdzenia, jeżeli tylko różniczkowana funkcja ma wystarczająco dużo ciągłych pochodnych cząstkowych, wynik nie zależy od kolejności różniczkowań, a tylko od tego, ile razy różniczkowano względem każdej ze zmiennych.

10.14 Zachodzi następujące twierdzenie, umożliwiające zamianę kolejności różniczkowania z całkowaniem względem różnych zmiennych.

Twierdzenie. *Jeśli funkcja $f(x, y)$ jest różniczkowalna w sposób ciągły, to funkcja*

$$\int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy$$

zmiennej x jest różniczkowalna w sposób ciągły, oraz

$$\frac{d}{dx} \int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy = \int_{\gamma}^{\delta} f_x(x, y) dy.$$

(Zakładamy, że $f(x, y)$ jest określona i różniczkowalna w sposób ciągły w jakimś przedziale $A < x < B$, $C < y < D$ i że $C < \gamma < \delta < D$.)

Twierdzenie natychmiast rozszerza się na przypadek, gdy f zależy od zmiennej całkowania y i kilku innych zmiennych, względem których można różniczkować.

Wniosek. Przy tych samych założeniach co w twierdzeniu, jeżeli $\gamma(x)$ i $\delta(x)$ są różniczkowalne o ciągłych pochodnych to

$$\frac{d}{dx} \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x, y) dy = \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f_x(x, y) dy - f(x, \gamma(x))\gamma'(x) + f(x, \delta(x))\delta'(x).$$

Dowód. Wniosek wynika natychmiast z twierdzenia. Utwórzmy funkcję trzech zmiennych $G(x, \gamma, \delta) = \int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy$. Przy obowiązujących założeniach $G(x, \gamma, \delta)$ jest różniczkowalna w sposób ciągły, i korzystając z poprzedniego twierdzenia i z zasadniczego twierdzenia rachunku różniczkowego otrzymujemy

$$G_x(x, \gamma, \delta) = \int_{\gamma}^{\delta} f_x(x, y) dy, \quad G_{\gamma}(x, \gamma, \delta) = -f(x, \gamma), \quad G_{\delta}(x, \gamma, \delta) = f(x, \delta).$$

Stosując regułę łańcuchową mamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x, y) dy &= \frac{d}{dx} G(x, \gamma(x), \delta(x)) = G_x + G_{\gamma}\gamma'(x) + G_{\delta}\delta'(x) \\ &= \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f_x(x, y) dy - f(x, \gamma(x))\gamma'(x) + f(x, \delta(x))\delta'(x). \quad \square \end{aligned}$$

10.15 Przykład: Niech $u(p, q) = \int_0^1 (e^{x^2} + x \sin(pq^2)) dx$. Znajdziemy u_p i u_q . Korzystamy z twierdzenia, różniczkując pod znakiem całki. Dodatkowa zmienna nie gra roli.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \int_0^1 (e^{x^2} + x \sin(pq^2)) dx &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial p} (e^{x^2} + x \sin(pq^2)) dx = \int_0^1 xq^2 \cos(pq^2) dx \\ &= q^2 \cos(pq^2) \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} q^2 \cos(pq^2). \end{aligned}$$

Podobnie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq} \int_0^1 (e^{x^2} + x \sin(pq^2)) dx &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial q} (e^{x^2} + x \sin(pq^2)) dx = \int_0^1 x2pq \cos(pq^2) dx \\ &= 2pq \cos(pq^2) \int_0^1 x dx = pq \cos(pq^2). \end{aligned}$$

Twierdzenie 10.16. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ spełnia $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ we wszystkich punktach swojej dziedziny, to jest stała na tej dziedzinie.

(Zakładamy, że dziedzina funkcji składa się z jednego „kawałka”, czyli dowolne dwa punkty dziedziny można połączyć krzywą gładką.)

Dowód. Niech (x_0, y_0) i (x_1, y_1) należą do dziedziny, i niech będą połączone krzywą gładką $(x(t), y(t))$, $0 \leq t \leq 1$

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1, \quad y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1.$$

Niech $F(t) = f(x(t), y(t))$. Korzystając z reguły łańcuchowej otrzymujemy

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) = 0,$$

a więc $F(t)$ jest stała, i $F(0) = F(1)$. Czyli $f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1)$. $\square$

Wniosek. Jeżeli dwie funkcje $f(x, y)$ i $g(x, y)$ mają identyczne pochodne cząstkowe we wszystkich punktach dziedziny, to różnią się najwyżej o stałą.

Dowód. Wystarczy zastosować powyższe twierdzenie do różnicy $f(x, y) - g(x, y)$. $\square$

Pojawia się następujące pytanie. Czy można odtworzyć funkcję z dowolnych pochodnych cząstkowych. Innymi słowy, jeżeli $u(x, y)$ i $v(x, y)$ są dwoma funkcjami różniczkowalnymi w sposób ciągły, to czy można znaleźć funkcję $f(x, y)$ spełniającą

$$f_x = u, \quad f_y = v.$$

Ze względu na równość pochodnych mieszanych na pewno musi zachodzić

$$u_y = v_x.$$

Jest to tak zwany *warunek całkowalności*. Okazuje się, że jeżeli u i v rozważamy na przedziale, to warunek całkowalności wystarcza do znalezienia funkcji $f(x, y)$.

Twierdzenie 10.17. Jeżeli $u(x, y)$ i $v(x, y)$ są funkcjami różniczkowalnymi w sposób ciągły na przedziale otwartym I , oraz $u_y = v_x$ na I to na I istnieje funkcja $f(x, y)$ spełniająca $f_x = u$, $f_y = v$. Funkcja $f(x, y)$ jest wyznaczona z dokładnością do stałej, więc można ją dodatkowo wybrać tak, żeby jej wartość w ustalonym punkcie (x_0, y_0) dziedziny I była ustalona na A . Tak wybrana funkcja $f(x, y)$ jest już jedyna.

Dowód. Najpierw założymy sobie, że szukana funkcja istnieje, i

$$f(x_0, y_0) = A.$$

Korzystając z tego, wyprowadzimy konkretny wzór na $f(x, y)$. Uzyskamy więc, że taka funkcja może być tylko jedna, i wzór, przy pomocy którego można będzie funkcję zdefiniować. Niech (x, y) będzie punktem dziedziny I . Korzystając z zasadniczego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego

$$\begin{aligned} f(x, y_0) - A &= f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = \int_{x_0}^x f_x(t, y_0) dt = \int_{x_0}^x u(t, y_0) dt, \\ f(x, y) - f(x, y_0) &= \int_{y_0}^y f_y(x, s) ds = \int_{y_0}^y v(x, s) ds, \end{aligned}$$

a więc

$$f(x, y) = A + \int_{x_0}^x u(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y v(x, s) ds.$$

Okazuje się więc, że jeśli $f(x, y)$ jest szukaną funkcją, to musi być dana powyższym wzorem. A więc taka funkcja może być tylko jedna. Na koniec wystarczy sprawdzić, że prawa strona powyższego wzoru rzeczywiście jest szukaną funkcją. Wystarczy sprawdzić pochodne cząstkowe prawej strony, i jej wartość w punkcie (x_0, y_0) .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(A + \int_{x_0}^x u(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y v(x, s) ds \right) &= \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x u(t, y_0) dt + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^y v(x, s) ds \\ &= 0 + u(x, y_0) + \int_{y_0}^y v_x(x, s) ds = u(x, y_0) + \int_{y_0}^y u_s(x, s) ds \\ &= u(x, y_0) + (u(x, y) - u(x, y_0)) = u(x, y). \end{aligned}$$

Podobnie

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(A + \int_{x_0}^x u(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y v(x, s) ds \right) = 0 + 0 + v(x, y)$$

W końcu, łatwo zauważyć, że jeżeli podstawić (x_0, y_0) w miejsce (x, y) , to otrzymamy A . $\square$

10.18 Przykład: Znajdźmy funkcję $f(x, y)$ spełniającą

$$f_x(x, y) = 3x^2y + 2y^2, \quad f_y(x, y) = x^3 + 4xy - 1, \quad f(1, 1) = 4.$$

Najpierw sprawdzamy warunek całkowalności

$$(3x^2y + 2y^2)_y = 3x^2 + 4y = (x^3 + 4xy - 1)_x.$$

Następnie całkujemy $f_x = 3x^2y + 2y^2$ względem x , i uzyskujemy

$$f(x, y) = x^3y + 2y^2x + c(y).$$

Musimy jeszcze znaleźć $c(y)$. W tym celu różniczkujemy nasz wzór na $f(x, y)$ względem y i porównujemy zadaną pochodną cząstkową.

$$x^3 + 4xy + c'(y) = x^3 + 4xy - 1.$$

Stąd $c'(y) = -1$, a więc $c(y) = -y + c$, czyli

$$f(x, y) = x^3y + 2xy^2 - y + c.$$

Podstawiając

$$f(1, 1) = 1 + 2 - 1 + c = 2 + c = 4, \quad \Rightarrow \quad c = 2,$$

więc ostatecznie

$$f(x, y) = x^3y + 2xy^2 - y + 2.$$

10.19 Twierdzenie 10.17 można rozciągnąć na funkcje dowolnej liczby zmiennych. Jeżeli funkcje $u_1, u_2, \dots, u_n$ są pochodnymi cząstkowymi funkcji n zmiennych f , czyli

$$u_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

to ze względu na równość pochodnych mieszanych muszą spełniać $\frac{1}{2}n(n-1)$ warunków całkowalności

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j.$$

Można udowodnić, dokładnie tak jak dowodziliśmy twierdzenia 10.17, że jeżeli funkcje $u_1, \dots, u_n$ zadane są w jakimś przedziale, są tam różniczkowalne w sposób ciągły, i spełniają powyższe warunki różniczkowalności, to można znaleźć funkcję f spełniającą $f_{x_i} = u_i$, $i = 1, \dots, n$. Funkcja f określona jest, jak poprzednio, z dokładnością do stałej.

10.20 Niech dana będzie funkcja $f(x, y)$ określona w otoczeniu punktu (x_0, y_0) . Mówimy, że $f(x, y)$ ma w punkcie (x_0, y_0) *minimum lokalne*, jeżeli $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ dla wszystkich punktów (x, y) z pewnego otoczenia punktu (x_0, y_0) . Jeżeli nierówność jest ścisła dla $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, to mówimy, że lokalne minimum jest *ściśle*. W przypadku nierówności odwrotnych mówimy że $f(x, y)$ ma *lokalne maksimum* (lub *ściśle lokalne maksimum*). Zauważmy, że jeżeli $f(x, y)$ jest różniczkowalna, to lokalne maksimum lub minimum może występować tylko w punkcie krytycznym. Podobnie jak dla funkcji jednej zmiennej, mogą istnieć punkty krytyczne w których nie ma ani maksimum ani minimum lokalnego. Jeżeli (x_0, y_0) jest punktem krytycznym funkcji $f(x, y)$, i w *każdym* przedziale o środku w (x_0, y_0) znajdują się zarówno punkty (x_1, y_1) dla których $f(x_1, y_1) > f(x_0, y_0)$ jak i punkty (x_2, y_2) dla których $f(x_2, y_2) < f(x_0, y_0)$, to punkt (x_0, y_0) nazywamy *punktem siodłowym* funkcji $f(x, y)$. Przykładem punktu siodłowego jest punkt $(0, 0)$ dla funkcji $f(x, y) = xy$. Łatwo zauważyć, że jest to punkt krytyczny, a funkcja ma w nim wartość 0. Z drugiej strony, w pierwszej i trzeciej ćwiartce układu współrzędnych funkcja jest dodatnia, a w drugiej i czwartej ćwiartce ujemna.

Twierdzenie klasyfikacyjne 10.21. *Jeżeli $f(x, y)$ jest dwukrotnie różniczkowalna w sposób ciągły w otoczeniu (x_0, y_0) , który jest punktem krytycznym, i jeżeli*

<i>w tym punkcie</i>	<i>wtedy punkt jest</i>
$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$	<i>punktem siodłowym</i>
$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ $f_{xx} > 0$	<i>punktem ściśłego lokalnego minimum</i>
$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ $f_{xx} < 0$	<i>punktem ściśłego lokalnego maksimum</i>

10.22 Przykład: Funkcja $f(x, y) = x^2 - 4y^2$ ma tylko jeden punkt krytyczny $(0, 0)$.

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 2(-8) - 0 = -16 < 0,$$

a więc zgodnie z twierdzeniem jest to punkt siodłowy. Poziomice $f(x, y)$ są hiperbolami, a powierzchnia $z = f(x, y)$ nazywa się paraboloidą hiperboliczną.

10.23 Niech funkcja $f(x, y)$ będzie określona i ciągła na zbiorze otwartym i ograniczonym (to znaczy takim, który zawiera się w jakimś skończonym przedziale), wraz z jego brzegiem. Wtedy $f(x, y)$ osiąga wartość największą i najmniejszą — być może na brzegu. Jest to sytuacja całkowicie analogiczna do przypadku funkcji jednej zmiennej. Wartość największą i najmniejszą funkcja może przyjąć na brzegu, albo w punkcie, w którym ma lokalne maksimum czy minimum. Mamy więc prostą procedurę szukania wartości najmniejszej i największej. Sprawdzamy punkty krytyczne (z pomocą twierdzenia klasyfikacyjnego, jeżeli to możliwe), a następnie szukamy wartości największej i najmniejszej na brzegu, korzystając z metod funkcji jednej zmiennej. Dla przykładu rozważmy wielomian $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$ na przedziale $-3 \leq x, y \leq 3$, i znajdziemy jego wartość największą i najmniejszą.

$$f_x(x, y) = 4x - y + 7, \quad f_y(x, y) = -x + 2y.$$

Żeby znaleźć punkty krytyczne musimy rozwiązać układ równań $4x - y + 7 = 0$ i $-x + 2y = 0$. Jedynym rozwiązaniem jest punkt $(-2, -1)$, który leży w rozważanym przez nas przedziale. $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4 \cdot 2 - (-1)^2 = 7 > 0$, więc korzystając z twierdzenia klasyfikacyjnego w punkcie $(-2, -1)$ funkcja ma lokalne ściśle minimum. Brzeg naszego przedziału składa się z 4 odcinków, które rozważymy po kolei. Najpierw górna część $y = 3$.

$$f(x, 3) = 2x^2 - 3x + 9 + 7x = 2x^2 + 4x + 9.$$

jest to więc funkcja kwadratowa, swoje minimum przyjmuje w punkcie $x = -1$, a maksimum w którymś z punktów brzegowych. Mamy więc trzy nowe punkty, w których $f(x, y)$ może przyjmować wartości największe bądź najmniejsze: $(-1, 3)$, $(-3, 3)$, $(3, 3)$. Rozważmy teraz dolny odcinek brzegu, $y = -3$.

$$f(x, -3) = 2x^2 + 10x + 9.$$

Minimum jest przyjęte w punkcie $x = -\frac{5}{2}$. Otrzymujemy więc trzy kolejne punkty „podejrzane”, $(-\frac{5}{2}, -3)$, $(-3, -3)$, $(3, -3)$. Rozważmy lewy odcinek brzegu, $x = -3$.

$$f(-3, y) = y^2 + 3y - 3.$$

Minimum jest przyjęte w punkcie $y = -\frac{3}{2}$. Otrzymujemy dodatkowy punkt do rozważań, $(-3, -\frac{3}{2})$. Zauważmy, że w tym przypadku (i w następnym) końce $(-3, -3)$ i $(-3, 3)$ są już włączone do dalszych rozważań. Ostatnim kawałkiem brzegu jest prawy pionowy odcinek $x = 3$, czyli

$$f(3, y) = y^2 - 3y + 39.$$

Minimum jest przyjęte w $y = \frac{3}{2}$. Otrzymujemy więc 9 punktów w których wartość $f(x, y)$ musimy obliczyć, i porównać w celu znalezienia wartości największej i najmniejszej. Te punkty to $(-3, -3)$, $(-\frac{5}{2}, -3)$, $(3, -3)$, $(3, \frac{3}{2})$, $(3, 3)$, $(-1, 3)$, $(-3, 3)$, $(-3, -\frac{3}{2})$ i w końcu $(-2, -1)$. Przekonamy się, że wartość największa przyjęta jest w punkcie $(3, -3)$ i wynosi 57, natomiast wartość najmniejsza jest przyjęta w punkcie wewnętrznym $(-2, -1)$ i wynosi -7 .