

Wykład z analizy

TYDZIEŃ 12 I 13.

CAŁKI WIELOKROTNE

12.1. Wprowadzamy pojęcie całki wielokrotnej. Podobnie jak w przypadku całki funkcji jednej zmiennej najpierw wprowadzimy intuicyjne, geometryczne pojęcie całki, ustalimy wymagane własności, a następnie w oparciu o te wymagane własności wprowadzimy ścisłą definicję analityczną. Skoncentrujemy się na przypadku całki podwójnej. Niech $f(x, y)$ będzie funkcją ciągłą, nieujemną, określoną na przedziale otwartym I , $a < x < b$, $c < y < d$. Wykresem tej funkcji jest powierzchnia $z = f(x, y)$ nad przedziałem I . Rozważmy trójwymiarową bryłę ograniczoną od dołu płaszczyzną xy , od góry wykresem funkcji $f(x, y)$, a z boków czterema pionowymi płaszczyznami $x = a$, $x = b$, $y = c$ oraz $y = d$. Niech V będzie objętością tej bryły. Liczbę V nazywamy *całką podwójną* funkcji $f(x, y)$ po przedziale I , i oznaczamy

$$V = \iint_I f(x, y) dx dy, \quad \text{lub} \quad \iint_{\substack{a < x < b \\ c < y < d}} f(x, y) dx dy.$$

12.2. Powyższa definicja pozwala nam wprost obliczyć tylko takie całki, w przypadku których potrafimy określić objętość bryły pod wykresem. Pojęcie objętości wprowadzone zostało (w zeszłym roku) następująco. Wybieramy pewną prostą w przestrzeni, niech to będzie oś y -ów. W punkcie $y = t$ tej osi tworzymy płaszczyznę do niej prostopadłą, i oznaczamy przez $A(t)$ pole przekroju tej płaszczyzny z rozważaną bryłą. Objętość bryły to całka po całej osi z funkcji $A(t)$. W naszym przypadku $A(t) = 0$ dla t spoza przedziału (c, d) , a więc

$$V = \int_c^d A(t) dt.$$

Policzymy teraz $A(t)$. Obszar ten leży w płaszczyźnie pionowej $y = t$, i w tej płaszczyźnie jest obszarem pod wykresem funkcji jednej zmiennej $x \mapsto z = f(x, t)$, dla $a < x < b$. W takim razie

$$A(t) = \int_a^b f(x, t) dx.$$

Zamieniając nazwę zmiennej całkowania t na y otrzymujemy więc

$$\iint_{\substack{a < x < b \\ c < y < d}} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy.$$

W ten sposób uzyskaliśmy wzór na obliczanie całki podwójnej przy pomocy dwóch całek pojedynczych, tak zwanych *całek iterowanych*. W powyższym wzorze nie będziemy pomijać dużych nawiasów, wystarczy pamiętać, że kiedy granice są na poszczególnych znakach całek, to chodzi o pojedyncze całki iterowane, i że znaki różniczek odnoszą się: zewnętrzna do całki zewnętrznej, a wewnętrzna do całki wewnętrznej. Przy obliczaniu objętości mogliśmy jako oś całkowania wybrać oś x -ów, wtedy uzyskalibyśmy odwrotną kolejność całek iterowanych

$$\iint_{\substack{a < x < b \\ c < y < d}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

12.3. Ważny przypadek szczególny występuje, kiedy funkcja podcałkowa jest iloczynem dwóch funkcji jednej zmiennej

$$f(x, y) = \phi(x)\psi(y).$$

Wtedy całka podwójna jest iloczynem dwóch całek pojedynczych

$$\iint_{\substack{a < x < b \\ c < y < d}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d \phi(x) \psi(y) dy dx = \int_a^b \phi(x) \int_c^d \psi(y) dy dx = \int_a^b \phi(x) dx \int_c^d \psi(y) dy.$$

12.4. Przykład: Obliczmy całkę podwójną $\iint_I (6x^2y + 8xy^3) dx dy$, gdzie I jest przedziałem $1 < x < 2$, $3 < y < 4$. Korzystamy z całek iterowanych

$$\int_3^4 \int_1^2 (6x^2y + 8xy^3) dx dy = \int_3^4 \left\{ \int_1^2 (6x^2y + 8xy^3) dx \right\} dy.$$

Funkcja $6x^2y + 8xy^3$ zmiennej x , przy ustalonym, stałym y ma funkcję pierwotną $2x^3y + 4x^2y^3$. A więc

$$\int_1^2 (6x^2y + 8xy^3) dx = (2x^3y + 4x^2y^3) \Big|_{x=1}^{x=2} = 14y + 12y^3,$$

czyli całka podwójna jest równa

$$\int_3^4 (14y + 12y^3) dy = (7y^2 + 3y^4) \Big|_3^4 = 574.$$

12.5. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ w przedziale I przyjmuje wartości zarówno dodatnie jak i ujemne, to całkę podwójną z $f(x, y)$ określamy jako różnicę objętości. Od objętości części bryły ograniczonej wykresem i płaszczyzną xy położonej powyżej tej płaszczyzny odejmujemy objętość pozostałej części bryły, położonej poniżej tej płaszczyzny. Powtarzając przytoczony w (12.2.) argument, z niewielkimi modyfikacjami znowu otrzymujemy, że całka podwójna jest równa całkom iterowanym, w dowolnej kolejności. Uwaga (12.3.) też pozostaje w mocy.

12.6. Całka podwójna została na razie określona tylko dla obszaru całkowania będącego dwuwymiarowym przedziałem, i tylko dla funkcji ciągłej. Całkę możemy też określić dla przypadku gdy funkcja $f(x, y)$ jest wystarczająco regularna, a ograniczony obszar D wystarczająco gładki (precyzyjnie określimy te pojęcia wkrótce). Niech obszar D zawiera się w jakimś przedziale I (skoro obszar jest ograniczony, to musi się zawierać w jakimś wystarczająco dużym skończonym przedziale). Rozszerzamy określenie funkcji $f(x, y)$ na cały przedział I

$$f(x, y) = 0, \quad \text{dla } (x, y) \in I \setminus D.$$

Całka $\iint_D f(x, y) dx dy$ jest określona jako $\iint_I f(x, y) dx dy$. W szczególnych przypadkach wzór ten przybiera prostą postać. Na przykład mówimy, że obszar D jest *wypukły w kierunku x* jeżeli przekrój obszaru D z każdą prostą poziomą $y = y_0$ jest odcinkiem $\alpha(y_0) < x < \beta(y_0)$ (lub jest pusty). Wtedy, jak łatwo zauważyć

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\gamma}^{\delta} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx dy,$$

gdzie γ i δ są tak dobrane, że przekrój obszaru D z prostą $y = y_0$ jest pusty, jeżeli y_0 leży poza przedziałem (γ, δ) . Podobnie można określić obszar wypukły w kierunku y , i całkować najpierw względem y a potem x .

12.7. Przykład: Niech D będzie obszarem trójkątnym ograniczonym prostymi $2y = x$, $y = 2x$ oraz $x = \pi$. Należy obliczyć $\iint_D \sin y dx dy$. Zauważmy, że obszar D jest wypukły zarówno w kierunku x jak

i y . Skorzystamy z wypukłości w kierunku y . Zauważmy, że dla $0 < x_0 < \pi$ przekrój obszaru D z prostą $x = x_0$ to odcinek tej prostej $x_0/2 < y < 2x_0$. Obliczamy więc całkę

$$\begin{aligned}\iint_D \sin y \, dx \, dy &= \int_0^\pi \int_{x/2}^{2x} \sin y \, dy \, dx = \int_0^\pi (-\cos y) \Big|_{x/2}^{2x} dx \\ &= \int_0^\pi \left(\cos \frac{x}{2} - \cos 2x \right) dx = \left(2 \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi = 2 \sin \pi/2 = 2.\end{aligned}$$

W przypadku gdybyśmy chcieli skorzystać z wypukłości obszaru D w kierunku x , czyli najpierw całkować po x a potem po y , to całkę po y (zewnętrzną) należałoby rozbić na dwie całki, od 0 do $\pi/2$ i od $\pi/2$ do 2π . Wynika to z faktu, że górna granica całki po x (wewnętrznej) w pierwszym przedziale wyniesie $2y$, a w drugim przedziale π . Dolna granica w obu przypadkach będzie równa $y/2$

$$\iint_D \sin y \, dx \, dy = \int_0^{\pi/2} \int_{y/2}^{2y} \sin y \, dx \, dy + \int_{\pi/2}^{2\pi} \int_{y/2}^{\pi} \sin y \, dx \, dy.$$

12.8. Całka podwójna zdefiniowana geometrycznie przy pomocy pojęcia objętości ma następujące własności

$$\begin{aligned}\iint_D dx \, dy &= \iint_D 1 \, dx \, dy = A = \text{pole obszaru } D, \\ \iint_D \alpha f(x, y) \, dx \, dy &= \alpha \iint_D f(x, y) \, dx \, dy, \quad \alpha \text{ dowolna stała}, \\ \iint_D (f(x, y) + g(x, y)) \, dx \, dy &= \iint_D f(x, y) \, dx \, dy + \iint_D g(x, y) \, dx \, dy, \\ \iint_D f(x, y) \, dx \, dy &\leq \iint_D g(x, y) \, dx \, dy, \quad \text{jeżeli } f \leq g \text{ w } D, \\ \iint_D \alpha \, dx \, dy &= \alpha \cdot \text{pole obszaru } D, \quad (\alpha \text{ stała}), \\ \iint_D f(x, y) \, dx \, dy &= \iint_{D_1} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{D_2} f(x, y) \, dx \, dy,\end{aligned}$$

jeżeli, w ostatnim przypadku $D_1 \cup D_2 = D$ oraz $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Własności te są geometrycznie jasne. Na przykład pierwsza z nich mówi, że objętość cylindra o podstawie D , i wysokości 1 to pole podstawy. Własności te można również udowodnić posługując się własnościami całek pojedynczych i stosując całki iterowane. Dla przykładu udowodnimy sobie ostatnią własność, dowód pozostałych pozostawiamy jako ćwiczenie. Wykorzystując funkcję $f(x, y)$ zdefiniujemy dwie dodatkowe funkcje na D

$$\begin{aligned}f_1(x, y) &= \begin{cases} f(x, y) & \text{jeżeli } (x, y) \in D_1, \\ 0 & \text{jeżeli } (x, y) \notin D_1, \end{cases} \\ f_2(x, y) &= \begin{cases} f(x, y) & \text{jeżeli } (x, y) \in D_2, \\ 0 & \text{jeżeli } (x, y) \notin D_2. \end{cases}\end{aligned}$$

Innymi słowy, f_1 to f na D_1 i 0 na D_2 , a f_2 odwrotnie, 0 na D_1 i f na D_2 . Ponieważ D_1 i D_2 są rozłączne, a ich suma to D , więc każdy punkt D musi należeć albo do D_1 albo do D_2 , ale nie do obu naraz. Tak więc

$$f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y).$$

Obliczamy więc

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D (f_1(x, y) + f_2(x, y)) dx dy = \iint_D f_1(x, y) dx dy + \iint_D f_2(x, y) dx dy \\ &= \iint_{D_1} f_1(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f_2(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.\end{aligned}$$

12.9. Podamy obecnie precyzyjną definicję całki podwójnej. Przypomnijmy, że podana wcześniej geometryczna definicja całki opierała się na intuicyjnie jasnym pojęciu objętości bryły. Jest to całkowicie wystarczające, gdy funkcja f jest ciągła, a obszar D wystarczająco regularny. W przeciwnym wypadku pojęcie objętości przestaje być intuicyjnie jasne. Geometryczna interpretacja całki jest ważna w zastosowaniach. Mówimy, że funkcja $f(x, y)$ jest *kawałkami ciągła* na przedziale I , jeżeli jest ciągła we wszystkich punktach I , z wyjątkiem co najwyżej skończonej ilości punktów, lub punktów leżących na skończonej ilości krzywych, każda z których jest albo odcinkiem, albo wykresem ciągłej, ściśle monotonicznej funkcji. Mówimy, że funkcja $f(x, y)$ jest „ograniczona” jeżeli istnieje stała M taka, że $|f(x, y)| \leq M$. Funkcje kawałkami ciągłe, ograniczone będziemy mogli całkować. Określenie „funkcja wystarczająco regularna” z punktu (12.6.) oznacza funkcję kawałkami ciągłą.

12.10. Podzielmy przedział $a < x < b$ na n podprzedziałów, i narysujmy pionową prostą przez każdy z punktów podziału. Następnie podzielmy przedział $c < y < d$ na m podprzedziałów, i przez każdy punkt podziału narysujmy prostą poziomą. W ten sposób dwuwymiarowy przedział $a < x < b$, $c < y < d$ został podzielony na nm dwuwymiarowych podprzedziałów. Mówimy, że takie podprzedziały tworzą *podział* dużego przedziału. Funkcję $\phi(x, y)$ określoną na przedziale I nazywamy *schodkową*, jeżeli dla pewnego podziału I jest stała na podprzedziałach. Zauważmy, że funkcja schodkowa jest zawsze kawałkami ciągła i ograniczona, punkty jej nieciągłości leżą na pionowych i poziomych liniach rozdzielających podprzedziały. Niech $\phi(x, y)$ będzie funkcją schodkową na przedziale I , niech przedziały $I_1, I_2, \dots, I_p$ tworzą podział I taki, że $\phi(x, y)$ jest stała na każdym podprzedziale i niech $z_1, z_2, \dots, z_p$ będą wartościami $\phi(x, y)$ na kolejnych podprzedziałach. Całkę podwójną z $\phi(x, y)$ na I definiujemy jako

$$\iint_I \phi(x, y) dx dy = z_1 \cdot \text{pole } I_1 + z_2 \cdot \text{pole } I_2 + \dots + z_p \cdot \text{pole } I_p.$$

Zauważmy, że powyższa definicja jest zgodna z wcześniejszą definicją geometryczną. Niech $f(x, y)$ będzie funkcją ograniczoną kawałkami ciągłą na I . Niech $\phi(x, y)$ i $\psi(x, y)$ będą funkcjami schodkowymi na I takimi, że

$$\phi(x, y) \leq f(x, y) \leq \psi(x, y) \quad \text{na } I.$$

Zgodnie z własnościami całki z punktu (12.8.) mamy

$$\iint_I \phi(x, y) dx dy \leq \iint_I f(x, y) dx dy \leq \iint_I \psi(x, y) dx dy.$$

Ta własność będzie podstawą analitycznej definicji całki podwójnej dla dowolnej funkcji ograniczonej kawałkami ciągłej.

Twierdzenie 12.11. Niech $f(x, y)$ będzie ograniczoną, kawałkami ciągłą funkcją na przedziale I . Istnieje wtedy liczba V (jedyna) o następującej własności: jeżeli $\phi(x, y)$ i $\psi(x, y)$ są dwiema dowolnymi funkcjami schodkowymi na I , spełniającymi $\phi(x, y) \leq f(x, y) \leq \psi(x, y)$, to

$$\iint_I \phi(x, y) dx dy \leq V \leq \iint_I \psi(x, y) dx dy.$$

Liczbę V nazywamy *całką podwójną z funkcji $f(x, y)$ po przedziale I* , i oznaczamy

$$\iint_I f(x, y) dx dy.$$

Powyższa definicja jest zgodna z poprzednią, geometryczną. Mamy również wzór na całki iterowane

Twierdzenie 12.12. Jeżeli $f(x, y)$ jest ograniczona i kawałkami ciągła na przedziale $a < x < b$, $c < y < d$ to

$$\iint_{\substack{a < x < b \\ c < y < d}} f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Powyższe twierdzenia pozostawiamy bez dowodu.

12.13. Niech D będzie ograniczonym zbiorem na płaszczyźnie. Następującą funkcję nazywamy *funkcją charakterystyczną* zbioru D

$$\chi_D(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{jeżeli } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Jeżeli D jest takim zbiorem, że $\chi_D(x, y)$ jest kawałkami ciągła, to możemy określić całkę po D . Dla $f(x, y)$ określonej na D , kawałkami ciągłej i ograniczonej

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_I \chi_D(x, y) f(x, y) dx dy,$$

gdzie I jest jakimś przedziałem zawierającym D . (Taki przedział na pewno istnieje, gdyż D jest ograniczony.) Powyższy warunek na D (czyli warunek, że $\chi_D(x, y)$ jest kawałkami ciągła) oznacza obszar „wystarczająco gładki” z punktu (12.6.).

12.14. Niech $f(x, y)$ będzie funkcją ograniczoną, kawałkami gładką na przedziale otwartym I . Znajdźmy podział przedziału I , i w każdym podprzedziale I_i ustalmy punkt (x_i, y_i) (ten punkt może być z podprzedziału I_i lub z jego brzegu). Sumę

$$S = f(x_1, y_1) \cdot \text{pole } I_1 + f(x_2, y_2) \cdot \text{pole } I_2 + \dots$$

nazywamy *sumą Riemanna* całki

$$V = \iint_I f(x, y) dx dy.$$

Zauważmy, że S jest całką z pewnej funkcji schodkowej $\omega(x, y)$, równej $f(x_j, y_j)$ na podprzedziale I_j . Zauważmy też, że jeżeli $\phi(x, y)$ i $\psi(x, y)$ są funkcjami schodkowymi na I takimi, że $\phi(x, y) \leq f(x, y) \leq \psi(x, y)$, to też $\phi(x, y) \leq \omega(x, y) \leq \psi(x, y)$. A więc

$$\iint_I \phi(x, y) dx dy \leq S \leq \iint_I \psi(x, y) dx dy,$$

oraz

$$\iint_I \phi(x, y) dx dy \leq \iint_I f(x, y) dx dy \leq \iint_I \psi(x, y) dx dy.$$

Jeśli różnica pomiędzy skrajnymi całkami jest mniejsza niż ϵ , to także różnica pomiędzy S a całką z $f(x, y)$ jest mniejsza niż ϵ . Z twierdzenia (12.11) wynika, że dla dowolnego dodatniego ϵ można znaleźć funkcje schodkowe spełniające $\phi(x, y) \leq f(x, y) \leq \psi(x, y)$ których całki różnią się o mniej niż ϵ . Wynika stąd, że całkę z $f(x, y)$ można przybliżyć z dowolną dokładnością przy pomocy odpowiednio dobranej sumy Riemanna.

12.15. Jako zastosowanie całki podwójnej znajdziemy teraz wzór na pole powierzchni wykresu funkcji dwóch zmiennych. Rozważmy niepionową płaszczyznę w przestrzeni trójwymiarowej. Niech będzie dany zbiór Δ na tej płaszczyźnie, zbiór na tyle regularny, żeby można było obliczyć jego powierzchnię (powierzchnia zbioru płaskiego jest określona przy pomocy całki). Niech D będzie *rzutem* zbioru Δ na płaszczyznę xy . Innymi słowy, bierzemy wszystkie punkty postaci $(x, y, 0)$, gdzie $(x, y, z) \in \Delta$ dla jakiegoś z . Pokażemy, że pole Δ jest równe polu D podzielonemu przez $\cos \theta$, gdzie θ jest kątem pomiędzy Δ a D . Możemy sobie założyć, że nachylona płaszczyzna zawierająca Δ przechodzi przez początek układu

współrzędnych. Możemy to uzyskać, przesuwając ją wzdłuż osi z -ów, co nie wpływa ani na rzut D , ani na rozważane pola. Dalej, możemy założyć, że ta płaszczyzna zawiera oś y -ów, co możemy osiągnąć obracając układ współrzędnych wokół osi z -ów, co znowu nie wpływa ani na D ani na pola. Wtedy na płaszczyźnie nachylonej wprowadzamy prostokątny układ współrzędnych składający się z osi y -ów wspólnej z płaszczyzną xy i z osi X , której rzut pokrywa się z osią x -ów na płaszczyźnie xy . Jak łatwo zauważyć, zbiór Δ powstaje z D przez rozciągnięcie wzdłuż jednej osi o czynnik $1/\cos\theta$. Dowodzi to naszego stwierdzenia o związku pól. Teraz niech D będzie obszarem ograniczonym, a $f(x, y)$ funkcją na D , różniczkowalną w sposób ciągły. W punkcie (x, y) wektor normalny do wykresu $f(x, y)$ ma współrzędne $(-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1)$. Wektor ten, jak łatwo sprawdzić tworzy z osią z -ów kąt θ taki, że

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}}.$$

Kąt ten jest też kątem, jaki z płaszczyzną xy tworzy płaszczyzna styczna do wykresu funkcji $f(x, y)$ w punkcie (x, y) . Dla uproszczenia niech D będzie przedziałem, i podzielmy D na małe podprzedziały. Nad każdym podprzedziałem I_j zastępujemy wycinek wykresu przez wycinek płaszczyzny stycznej do wykresu w jakimś punkcie (x_j, y_j) podprzedziału. Suma pól wszystkich wycinków płaszczyzn stycznych wynosi

$$\sqrt{1 + f_x(x_1, y_1)^2 + f_y(x_1, y_1)^2} \cdot \text{pole } I_1 + \sqrt{1 + f_x(x_2, y_2)^2 + f_y(x_2, y_2)^2} \cdot \text{pole } I_2 + \dots$$

Zauważamy, że z jednej strony jest to suma Riemanna dla pewnej całki, z drugiej strony jest to przybliżenie pola wykresu $f(x, y)$. Przyjmujemy więc następującą definicję pola wykresu $f(x, y)$ nad obszarem D

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy.$$

12.16. W niektórych przypadkach całka podwójna jest łatwiejsza do wyliczenia przy zastosowaniu współrzędnych biegunowych. Niech funkcja $f(x, y)$ będzie określona na kole $x^2 + y^2 < R^2$. Wtedy

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 < R^2} f(x, y) dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr. \end{aligned}$$

Nie będziemy dowodzić tego wzoru, a jako uzasadnienie zauważmy, pole małego „prostokąta biegunowego” $[\theta, \theta + \Delta\theta] \times [r, r + \Delta r]$ wynosi w przybliżeniu $r\Delta r\Delta\theta$. Powyższy wzór możemy też stosować w przypadku obszaru całkowania D różnego od koła, ale ograniczonego. Wtedy powiększamy obszar całkowania do koła zawierającego D , a wartości funkcji $f(x, y)$ poza D określamy jako 0. Jeżeli obszar D jest „wypukły w kierunku r ” (analogicznie do współrzędnych prostokątnych), to otrzymujemy wzór

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\alpha(\theta)}^{\beta(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta,$$

a w przypadku gdy obszar D jest „wypukły w kierunku θ ” otrzymujemy wzór

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\alpha(r)}^{\beta(r)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr.$$

12.17. Przykład: Niech D będzie wycinkiem pierścienia $1 < r < 3$ leżącym w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych. Obliczymy

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy.$$

We współrzędnych biegunowych D jest prostokątem $[0, \pi/2] \times [1, 3]$, i jest wypukły w obu kierunkach. Podstawiając do wzoru otrzymujemy

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x^2+y^2} dx dy &= \int_0^{\pi/2} \int_1^3 e^{r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} e^{r^2} \Big|_{r=1}^{r=3} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{e^9 - e}{2} d\theta = \frac{\pi e(e^8 - 1)}{4}. \end{aligned}$$

12.18. Całka podwójna nazywa się *niewłaściwa*, jeżeli obszar całkowania, lub funkcja podcałkowa (lub jedno i drugie) są nieograniczone. Całki niewłaściwe będziemy rozważać tylko dla funkcji nieujemnych. Niech $f(x, y)$ będzie funkcją nieujemną na przedziale I , kawałkami ciągłą, ale niekoniecznie ograniczoną. Niech A będzie liczbą dodatnią. Określamy nową funkcję $f_A(x, y)$

$$f_A(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{jeżeli } f(x, y) < A \\ 0 & \text{jeżeli } f(x, y) \geq A. \end{cases}$$

Nowa funkcja jest również kawałkami ciągła, i dodatkowo ograniczona. Możemy więc obliczyć jej całkę

$$\iint_I f_A(x, y) dx dy.$$

Mówimy, że $f(x, y)$ jest *całkowalna* na I jeżeli istnieje skończona granica

$$\iint_I f(x, y) dx dy = \lim_{A \rightarrow \infty} \iint_I f_A(x, y) dx dy.$$

Zauważmy, że $\iint_I f_A dx dy$ rośnie wraz z A , więc granica zawsze istnieje (właściwa lub niewłaściwa). Jeżeli granica jest równa ∞ mówimy, że całka jest rozbieżna, i piszemy $\iint_I f dx dy = \infty$.

12.19. Niech D będzie obszarem nieograniczonym. Niech $I_1, I_2, \dots$ będzie ciągiem obszarów ograniczonych takich, że (a) każdy I_i zawiera się w następnym I_{i+1} , oraz (b) każde koło $x^2 + y^2 < R^2$ zawiera się w którymś I_i (a więc także we wszystkich następnych). Na przykład, I_i mogą być przedziałami $-i < x, y < i$, albo kołami $x^2 + y^2 < i^2$. Niech $D_i = D \cap I_i$. Wtedy każdy obszar D_i jest ograniczony, i w sumie „wypełniają” D . Jeżeli $f(x, y)$ jest nieujemna, kawałkami ciągła i ograniczona na wszystkich obszarach D_i , to możemy obliczyć całki

$$\iint_{D_i} f(x, y) dx dy.$$

Jeżeli powyższy ciąg całek (jest to ciąg rosnący) jest zbieżny do skończonej granicy to piszemy

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{j \rightarrow \infty} \iint_{D_j} f(x, y) dx dy,$$

i mówimy że $f(x, y)$ jest całkowalna na D , lub że powyższa całka jest zbieżna. W przeciwnym przypadku mówimy, że całka jest rozbieżna. Zauważmy, że w powyższej definicji występuje dowolny ciąg obszarów ograniczonych spełniających dwa warunki. Można łatwo zauważyć, że całkowalność $f(x, y)$ nie zależy od wyboru konkretnego ciągu. Najczęściej wybiera się przedziały lub koła. DO obliczania całek niewłaściwych możemy używać całek iterowanych i współrzędnych biegunowych.

12.20. Przykład: Obliczymy ważną całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

W dowodzie wykorzystamy podwójną całkę niewłaściwą

$$T = \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Skorzystamy ze współrzędnych biegunowych

$$T = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\right)' dr = \pi(-e^{-r^2})|_0^\infty = \pi.$$

Z drugiej strony

$$T = \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx\right)^2,$$

zamieniając nazwę zmiennej całkowania.

12.21. Pojęcie całki wielokrotnej natychmiast można przenieść na przypadek trzech zmiennych. Mówimy, że funkcja $f(x, y, z)$ określona na trójwymiarowym przedziale jest kawałkami ciągła jeżeli jej punkty nieciągłości (jeżeli są) leżą na skończonej liczbie powierzchni. Każda z tych powierzchni albo musi być płaszczyzną równoległą do osi współrzędnych albo musi być przedstawialna jako wykres $x = \phi_1(y, z)$ i jako wykres $y = \phi_2(x, z)$ i jako wykres $z = \phi_3(x, y)$, a wszystkie trzy funkcje są ciągłe. Jeżeli I jest przedziałem $x_0 < x < x_1$, $y_0 < y < y_1$, $z_0 < z < z_1$ to całkę po I możemy obliczyć jako całkę iterowaną

$$\iiint_I f(x, y, z) dx dy dz = \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Definicja całki w oparciu o funkcje schodkowe, pojęcie sumy Riemanna, twierdzenia (12.11) i (12.12) przenoszą się na przypadek trzech zmiennych, podobnie jak własności takiej całki. Całki iterowane można obliczać we wszystkich możliwych kolejnościach. Można je także obliczać jako całki pojedyncze iterowane z podwójnymi.

12.22. Przykład: D jest obszarem ograniczonym płaszczyznami $x = 0$, $y = 0$, $z = 4$ i paraboloidą $z = x^2 + y^2$, a $f(x, y, z) = 2x$. Dla obszaru D współrzędne z przyjmują wartości pomiędzy 0 a 4. Współrzędne x, y przyjmują wszystkie wartości dodatnie z zachowaniem warunku $x^2 + y^2 < z$. Tak więc dla ustalonego z y przyjmuje wszystkie wartości od 0 do $\sqrt{z}$, a dla każdego takiego y x przyjmuje wartości od 0 do $\sqrt{z - y^2}$. Obliczamy

$$\begin{aligned} \iiint_D 2x dx dy dz &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{z-y^2}} 2x dx dy dz = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{z}} x^2 \Big|_0^{\sqrt{z-y^2}} dy dz \\ &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{z}} (z - y^2) dy dz = \int_0^4 \left(zy - \frac{y^3}{3}\right) \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{z}} dz \\ &= \int_0^4 \frac{2}{3} z^{3/2} dz = \frac{4}{15} z^{5/2} \Big|_{z=0}^{z=4} = \frac{128}{15}. \end{aligned}$$

12.23. Jeżeli D jest wystarczająco regularnym obszarem w $\mathbf{R}^3$ to całkę

$$\iiint_D dx dy dz$$

nazywamy *objętością* D . „Wystarczająco regularny” oznacza, że funkcja charakterystyczna D jest kawałkami ciągła.

12.24. Dla punktu (x, y, z) wprowadziliśmy współrzędne cylindryczne (r, θ, z) związane ze współrzędnymi prostokątnymi następującymi zależnościami

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

Innymi słowy r i θ są współrzędnymi biegunowymi rzutu (x, y, z) na płaszczyznę xy . Niech $f(x, y, z)$ będzie kawałkami ciągła i ograniczona na cylindrze $x^2 + y^2 < R^2$, $|z| < H$. Mamy wtedy następujący wzór

$$\iiint_{\substack{x^2+y^2 < R^2 \\ |z| < H}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-H}^H \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

Widzimy że, podobnie jak w przypadku całki podwójnej we współrzędnych biegunowych nie wystarczy przepisać całki w nowych współrzędnych, trzeba pomnożyć funkcję przez r , tak zwany jakobian. Jak zwykle, powyższy wzór najczęściej stosuje się do obszarów innych niż cylindry. Wtedy granice całkowania w całkach iterowanych po prawej stronie trzeba dobrać właściwie.

12.25. Przykład: D jest obszarem określonym przez

$$x^2 + y^2 < 1, \quad 0 < z < x^2 + y^2,$$

a $f(x, y, z) = x^2 y^2$. Wprowadzamy współrzędne cylindryczne. Najwygodniej będzie całkę po z obliczyć najpierw, gdyż granice całkowania dla z , przy ustalonym x i y , są podane wprost. Obliczamy

$$\begin{aligned} \iiint_D x^2 y^2 dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2} (r \cos \theta)^2 (r \sin \theta)^2 r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2} \frac{1}{4} r^5 \sin^2 2\theta dz r d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{4} r^7 \sin^2 2\theta dr d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta \int_0^1 r^7 dr = \frac{1}{4} \pi \frac{1}{8} = \frac{\pi}{32}. \end{aligned}$$

12.26. Niech punkt (x, y, z) ma współrzędne sferyczne (ρ, θ, ϕ) , czyli

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi.$$

Innymi słowy, punkt (x, y, z) jest opisany przez długość swojego wektora wodzącego (ρ), swoją „długość geograficzną” (θ , mierzona od 0 do 2π), oraz swoją „szerokość geograficzną” (ϕ , mierzona jako kąt pomiędzy wektorem wodzącym a osią z , od 0 do π). Przy zwykłych założeniach na funkcję $f(x, y, z)$ mamy następujący wzór

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 < R^2} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi.$$

W przypadku całki we współrzędnych sferycznych jakobian wynosi $\rho^2 \sin \phi$.

12.27. Przykład: obliczymy objętość półkuli $z > 0$, $x^2 + y^2 + z^2 < 9$ po usunięciu z niej zawartości stożka $3(x^2 + y^2) < z^2$. Obszar całkowania nie jest kulą, więc musimy ustalić granice całkowania. Kąt ϕ będzie się od $\pi/6$ do $\pi/2$, θ od 0 do 2π , a ρ od 0 do 3. Tak więc

$$\begin{aligned} V &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^3 \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi = 2\pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin \phi d\phi \int_0^3 \rho^2 d\rho \\ &= 2\pi (-\cos \phi) \Big|_{\phi=\pi/6}^{\phi=\pi/2} \left(\frac{1}{3} \rho^3 \right) \Big|_{\rho=0}^{\rho=3} = 2\pi \frac{\sqrt{3}}{2} 9 = 9\sqrt{3}\pi. \end{aligned}$$