

Wykład z analizy

TYDZIEŃ 14 I 15.

CAŁKI KRZYWOLINIOWE

13.1. Niech C będzie krzywą gładką na płaszczyźnie, określoną przez funkcje $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, różniczkowalne w sposób ciągły. Załóżmy, że $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są funkcjami ciągłymi określonymi na jakimś zbiorze, zawierającym krzywą C . Następującą całkę nazywamy *całką krzywoliniową z $Pdx + Qdy$ po krzywej C*

$$\int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt,$$

i oznaczamy

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Całka krzywoliniowa zależy od krzywej całkowania C , ale nie od jej konkretnej parametryzacji. Niech $\phi(\tau)$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$ będzie dopuszczalną zamianą parametru, czyli funkcją różniczkowalną w sposób ciągły, $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$, oraz $\phi'(\tau) > 0$. Wtedy parametryzacja $x(\phi(\tau))$, $y(\phi(\tau))$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$ również reprezentuje krzywą C . Obliczymy całkę krzywoliniową posługując się obiema parametryzacjami. Dla wygody niech $Q(x, y) = 0$. Obliczając całkę przy parametrze t otrzymujemy

$$\int_a^b P(x(t), y(t))x'(t) dt,$$

a posługując się parametrem τ otrzymujemy

$$\int_\alpha^\beta P(x(\phi(\tau)), y(\phi(\tau)))x'(\phi(\tau))\phi'(\tau) d\tau.$$

Powyższe całki są równe na mocy twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie.

14.2. Przykład: Krzywa C jest określona przez $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$, $0 \leq t \leq 1$. Obliczymy $\int_C y dx - x dy$. Podstawiając do wzoru otrzymujemy

$$\int_0^1 ((\cos t)(\cos t) - (\sin t)(-\sin t)) dt = \int_0^1 dt = 1.$$

14.3. Całka krzywoliniowa ma następujące własności.

$$\begin{aligned} \int_C (P_1 + P_2) dx + (Q_1 + Q_2) dy &= \int_C P_1 dx + Q_1 dy + \int_C P_2 dx + Q_2 dy, \\ \int_C cP dx + cQ dy &= c \int_C P dx + Q dy, \quad c - \text{stała}, \\ \int_{-C} P dx + Q dy &= - \int_C P dx + Q dy, \end{aligned}$$

gdzie $-C$ jest krzywą C obieganą w przeciwnym kierunku, oraz

$$\int_{C_1+C_2} P dx + Q dy = \int_{C_1} P dx + Q dy + \int_{C_2} P dx + Q dy,$$

gdzie $C_1 + C_2$ oznacza krzywą C_1 z następującą po niej krzywą C_2 (jest to możliwe, kiedy koniec C_1 pokrywa się z początkiem C_2). Powyższe właściwości wynikają wprost z definicji. Ostatnia własność pozwala rozszerzyć definicję całki krzywoliniowej na krzywe tylko kawałkami gładkie.

14.4. Przykład: Niech krzywa C składa się z odcinka $[0, 1]$ osi x , przebieganego w prawo (C_1) i po nim ćwiartki okręgu jednostkowego, obieganego od punktu $(1, 0)$ do $(0, 1)$ (C_2). Obliczmy

$$\int_C (2 + y) dx + x dy.$$

Obliczamy całkę po C_1 . Wybieramy parametryzację $x(t) = t$, $y(t) = 0$, $0 \leq t \leq 1$, i podstawiamy do wzoru

$$\int_{C_1} (2 + y) dx + x dy = \int_0^1 (2 + t \cdot 0) dt = 2.$$

Wybieramy parametryzację dla C_2 , $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$,

$$\begin{aligned} \int_{C_2} (2 + y) dx + x dy &= \int_0^{\pi/2} ((2 + \sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t)) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos 2t - 2 \sin t) dt = \left(2 \cos t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = -2. \end{aligned}$$

Tak więc

$$\int_C (2 + y) dx + x dy = \int_{C_1} (2 + y) dx + x dy + \int_{C_2} (2 + y) dx + x dy = 2 - 2 = 0.$$

Twierdzenie 14.5. Niech $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ będą ciągle na jakimś obszarze D . Jeśli istnieje funkcja $f(x, y)$ na D spełniająca

$$(1) \quad P(x, y) = f_x(x, y), \quad Q(x, y) = f_y(x, y),$$

to dla każdej krzywej kawałkami gładkiej C w obszarze D prowadzącej od punktu A do punktu B zachodzi

$$(2) \quad \int_C P dx + Q dy = f(B) - f(A).$$

W szczególności

$$(3) \quad \int_C P dx + Q dy = 0 \quad \text{dla każdej krzywej zamkniętej } C \text{ w } D.$$

Odwrótnie, jeżeli powyższy warunek (3) zachodzi, to funkcja $f(x, y)$ spełniająca (1) istnieje.

Używając zapisu Leibniza równość (2) można zapisać symbolicznie

$$\int_A^B df = f(B) - f(A),$$

co bardzo przypomina zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego, i jest łatwe do zapamiętania. Istotnie twierdzenie (14.5) jest ściśle związane z zasadniczym twierdzeniem.

Dowód. Załóżmy, że $f(x, y)$ istnieje, i spełnione jest (1). Niech C ma parametryzację $x(t), y(t)$, $a \leq t \leq b$. Niech punkty początkowy i końcowy C to będą $A = (a_1, a_2)$ i $B = (b_1, b_2)$, czyli $x(a) = a_1$, $y(a) = a_2$, $x(b) = b_1$, $y(b) = b_2$. Niech $F(t) = f(x(t), y(t))$. Stosując regułę łańcuchową otrzymujemy

$$F'(t) = P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t).$$

Obliczamy całkę

$$\begin{aligned} \int_C P dx + Q dy &= \int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt \\ &= \int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a) = f(B) - f(A). \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc (2), co pociąga (3) automatycznie dla $A = B$. Teraz załóżmy, że (3) jest spełnione. Musimy znaleźć funkcję $f(x, y)$. Po pierwsze zauważmy, że z (3) wynika, że całka nie zależy od drogi całkowania (a tylko od punktu początkowego i końcowego). Niech C_1 i C_2 będą dwiema krzywymi kawałkami gładkimi mającymi te same punkty początkowy i końcowy. Wtedy $C_1 + (-C_2)$ jest krzywą zamkniętą, a więc

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{C_1 + (-C_2)} P dx + Q dy = \int_{C_1} P dx + Q dy + \int_{-C_2} P dx + Q dy \\ &= \int_{C_1} P dx + Q dy - \int_{C_2} P dx + Q dy. \end{aligned}$$

Skoro całka zależy tylko od punktów początkowego i końcowego drogi, to następująca definicja jest poprawna (ma sens). Ustalmy w D punkt (x_0, y_0) , i niech

$$f(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} p dx + Q dy,$$

gdzie całkowanie odbywa się po jakiegokolwiek drodze w D z (x_0, y_0) do (x, y) . Wiemy, że *jakaś* droga z (x_0, y_0) do (x, y) musi istnieć, to jest stałe założenie o obszarze D . Musimy obliczyć pochodne cząstkowe $f(x, y)$ i sprawdzić, że (1) zachodzi. Weźmy dowolny punkt (x_1, y_1) i ustalmy krzywą C_1 z (x_0, y_0) do (x_1, y_1) . Dla dowolnego h niech krzywa C_2 będzie poziomym odcinkiem od (x_1, y_1) do $(x_1 + h, y_1)$. Wtedy

$$f(x_1 + h, y_1) - f(x_1, y_1) = \int_{C_1 + C_2} P dx + Q dy - \int_{C_1} P dx + Q dy = \int_{C_2} P dx + Q dy.$$

Wybieramy najprostszą parametryzację dla C_2 $x(t) = x_1 + th$, $y(t) = y_1$, $0 \leq t \leq 1$, i podstawiamy

$$\int_{C_2} P dx + Q dy = \int_0^1 P(x_1 + th, y_1) h dt = \int_0^h P(x_1 + t, y_1) dt.$$

Tak więc

$$\frac{f(x_1 + h, y_1) - f(x_1, y_1)}{h} = \frac{\int_0^h P(x_1 + t, y_1) dt}{h} = \frac{F(h) - F(0)}{h},$$

gdzie

$$F(h) = \int_0^h P(x_1 + t, y_1) dt, \quad F(0) = 0.$$

Korzystając z zasadniczego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego otrzymujemy, że powyższe wyrażenia mają granicę gdy $h \rightarrow 0$, i ta granica to $P(x_1, y_1)$. Tak więc, ponieważ (x_1, y_1) był dowolnym punktem D , otrzymujemy

$$f_x(x, y) = P(x, y)$$

dla wszystkich punktów (x, y) obszaru D . Podobnie możemy obliczyć f_y . $\square$

14.6. Niech $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ będą różniczkowalne w sposób ciągły. Znajdziemy teraz łatwe do sprawdzenia warunki na istnienie funkcji $f(x, y)$ spełniającej (1). Jeżeli taka funkcja istnieje, to ze względu na równość pochodnych mieszanych musi zachodzić

$$(4) \quad P_y = Q_x,$$

czyli tak zwany warunek całkowalności. Widzieliśmy już, że jeżeli obszar D jest przedziałem, to (4) gwarantuje istnienie $f(x, y)$. Najczęściej jednak D nie jest przedziałem, i wtedy sytuacja się komplikuje. Rozważmy funkcje

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

różniczkowalne w sposób ciągły na D — płaszczyźnie z usuniętym punktem $(0, 0)$. Łatwo sprawdzić, że

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Z drugiej strony niech C będzie okręgiem jednostkowym, sparametryzowanym przez $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Wtedy

$$\int_C P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} ((-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t) dt = 2\pi.$$

Tak więc funkcja $f(x, y)$ spełniająca (1) nie może istnieć. Do sformułowania użytecznego twierdzenia potrzebne będzie nam pojęcie homotopii krzywych. Niech C_1 i C_2 będą dwiema krzywymi leżącymi w D , ze wspólnymi punktami początkowym i końcowym. Mówimy, że te krzywe są *homotopijne*, jeżeli jedną można w sposób ciągły zdeformować na drugą, utrzymując początek i koniec nieruchomo, i nie opuszczając obszaru D . Poprzestaniemy na powyższej, intuicyjnej definicji. Łatwo zauważyć, że jeżeli w D jest dziura, i C_1 i C_2 otaczają ją z przeciwnych stron, to nie mogą być homotopijne. Z drugiej strony, jeżeli D jest całą płaszczyzną, albo przedziałem, to każde dwie krzywe, o wspólnym początku i końcu są homotopijne. Precyzyjna definicja pojęcia homotopii zostanie wprowadzona na kursie topologii. Możemy sformułować (bez dowodu) następujące użyteczne twierdzenie.

Twierdzenie 14.7. *Jeśli funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są różniczkowalne w sposób ciągły w D i spełniają warunek całkowalności (4) to*

$$\int_{C_1} P dx + Q dy = \int_{C_2} P dx + Q dy$$

dla dowolnych dwóch krzywych homotopijnych w D .

Obszar D nazywamy *jednospójnym* jeżeli dowolne dwie krzywe w D o wspólnym początku i końcu są homotopijne. Jak już zauważyliśmy cała płaszczyzna i dowolny przedział są jednospójne. Można powiedzieć w skrócie, że obszar jest jednospójny, jeżeli nie ma „dziur”. Mamy następujący wniosek z twierdzenia 14.7.

Twierdzenie 14.8. *Jeżeli D jest jednospójny, $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ różniczkowalne w sposób ciągły w D . spełniają warunek całkowania (4), to istnieje funkcja $f(x, y)$ określona na D spełniająca (1).*

14.9. Niech D będzie obszarem na płaszczyźnie, a C kawałkami gładką, zorientowaną krzywą prostą. (Krzywa nazywa się prostą, jeżeli nie przecina się sama ze sobą.) Mówimy, że krzywa C o powyższych własnościach jest krzywą brzegową D jeżeli każdy punkt C jest punktem brzegowym D i każdy punkt brzegowy D jest punktem C . Mówimy że krzywa brzegowa C obszaru D jest zorientowana *właściwie* lub *dodatnio* względem D , jeżeli idąc wzdłuż C , zgodnie z kierunkiem parametryzacji, obszar D mamy po lewej.

Twierdzenie Green'a. *Niech C będzie dodatnio zorientowaną, kawałkami gładką krzywą brzegową obszaru D . Niech $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ będą różniczkowalne w sposób ciągły w pewnym otoczeniu C i D (czyli w jakimś zbiorze otwartym zawierającym C i D). Wtedy*

$$(5) \quad \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_C P dx + Q dy.$$

Równość (5) jest równoważna dwóm równościom

$$(6) \quad \int_C P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy,$$

$$(7) \quad \int_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

Istotnie, jeżeli wstawić $P = 0$ lub $Q = 0$ w (5) otrzymamy powyższe równości, a dodając je stronami dostajemy (5). Zauważmy, że z (5) wynika, że

$$(8) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \implies \int_C P dx + Q dy = 0.$$

Z założeń o brzegu obszaru D wynika, że jest on jednospójny, więc (8) nie jest niespodzianką.

14.10. Wstawiając $P(x, y) = -y$ w (6) lub $Q(x, y) = x$ w (7) otrzymujemy wzory na pole A obszaru D

$$A = - \int_C y dx,$$

$$A = \int_C x dy,$$

a także, dodając stronami

$$A = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx.$$

Skorzystamy z tego ostatniego wzoru. Niech krzywa C będzie zadana we współrzędnych biegunowych przez $r = \phi(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, gdzie $\phi(\theta)$ jest ciągła, kawałkami gładka i dodatnia. Taka krzywa jest krzywą brzegową obszaru D określonego przez $r < \phi(\theta)$. Krzywą C można sparametryzować, z właściwą orientacją, przez

$$x(\theta) = \phi(\theta) \cos \theta, \quad y(\theta) = \phi(\theta) \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Wstawiając tę parametryzację do (8) otrzymujemy

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-\phi(\theta)\phi'(\theta) \sin \theta \cos \theta + \phi(\theta)^2 \cos^2 \theta + \phi(\theta)\phi'(\theta) \cos \theta \sin \theta + \phi(\theta)^2 \cos^2 \theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \phi(\theta)^2 d\theta.$$

Odtworzyliśmy w ten sposób znany nam już wcześniej wzór.

Dowód tw. Greena. Udowodnimy twierdzenie Greena dla D będącego przedziałem. Kompletny dowód sprowadza się do „pokrojenia” obszaru D na małe kawałki określonego typu (na przykład przedziały) i skorzystanie z wcześniej udowodnionego twierdzenia dla tego typu kawałków. Tak więc niech D będzie przedziałem $a < x < b$, $c < y < d$. Krzywa brzegowa C składa się z 4 części.

$$\begin{aligned} C_1 : \quad & x(t) = t, \quad y(t) = c, \quad a \leq t \leq b, \\ C_2 : \quad & x(t) = b, \quad y(t) = t, \quad c \leq t \leq d, \\ C_3 : \quad & x(t) = b - t, \quad y(t) = d, \quad 0 \leq t \leq b - a, \\ C_4 : \quad & x(t) = a, \quad y(t) = d - t, \quad 0 \leq t \leq d - c. \end{aligned}$$

Udowodnimy tylko (6), (7) można udowodnić tak samo. Obliczamy lewą stronę.

$$\begin{aligned} - \int_C P dx &= - \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx + \int_{C_3} P dx + \int_{C_4} P dx \\ &= - \int_{C_1} P(x, y) dx - \int_{C_3} P(x, y) dx = - \int_a^b P(t, c) dt - \int_0^{b-a} P(b - t, d) (-1) dt \\ &\quad - \int_a^b P(t, c) dt - \int_b^a P(t, d) dt = \int_a^b P(t, d) dt - \int_a^b P(t, c) dt, \end{aligned}$$

gdzie po drodze wykorzystaliśmy fakt, że całki po pionowych odcinkach są zerami (gdyż $x'(t) = 0$). Obliczmy teraz prawą stronę

$$\iint_{\substack{a < x < b \\ c < y < d}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b \int_c^d P_y(x, y) dy dx = \int_a^b P(x, y) \Big|_{y=c}^{y=d} = \int_a^b (P(x, d) - P(x, c)) dx.$$

Zamieniając oznaczenia zmiennej całkowania otrzymujemy (6). $\square$

14.11. Pojęcie całki krzywoliniowej przenosi się na przypadek przestrzeni trójwymiarowej. Jeżeli $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ są funkcjami ciągłymi na jakimś obszarze zawierającym krzywą kawałkami gładką C określoną przez $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $a \leq t \leq b$, to całką krzywoliniową

$$\int_C P dx + Q dy + R dz$$

nazywamy wyrażenie

$$\int_a^b (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt$$

Jeżeli istnieje $f(x, y, z)$ taka, że

$$P = f_x, \quad Q = f_y, \quad R = f_z$$

to całka

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = f(\text{koniec}) - f(\text{początek}),$$

czyli całka nie zależy od konkretnej drogi całkowania pomiędzy początkiem a końcem. Odwrotnie, jeżeli

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = 0 \quad \text{dla każdej krzywej zamkniętej } C,$$

to funkcja $f(x, y, z)$ istnieje. Jeżeli P , Q i R są różniczkowalne w sposób ciągły oraz

$$P_y = Q_x, \quad P_z = R_x, \quad Q_z = R_y,$$

a obszar jest jednospójny, to funkcja $f(x, y, z)$ istnieje. Pojęcie jednospójności jest takie samo, jak w przypadku dwóch zmiennych. Zauważmy jednak, że w trzech wymiarach obszar jednospójny może zawierać dziury. Na przykład cała przestrzeń z usuniętym jednym punktem $(0, 0, 0)$ jest jednospójna.