Wykład z analizy

Tydzień 6.

Rachunek różniczkowy funkcji o wartościach wektorowych

6.1 Funkcja o wartościach wektorowych to przyporządkowanie

$$t \mapsto \mathbf{f}(t)$$

liczbom rzeczywistym t wektorów $\mathbf{f}(t)$. Będziemy rozważali funkcje, których wartościami będą wektory na płaszczyźnie, albo funkcje, których wartościami będą wektory przestrzeni trójwymiarowej. Dla ustalenia uwagi, skoncentrujemy się na funkcjach, których wartościami będą wektory na płaszczyźnie. Na przykład, jeżeli $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są dwoma ustalonymi wektorami, i $\mathbf{a} \neq 0$ to określmy

$$\mathbf{f}(t) = t\mathbf{a} + \mathbf{b}, \qquad -\infty < t < \infty. \tag{1}$$

Aby wyobrazić sobie daną funkcję o wartościach wektorowych często myślimy o jej zbiorze wartości. Wygodnie jest myśleć o wektorach $\mathbf{f}(t)$ jako o wektorach wodzących w odniesieniu do jakiegoś ustalonego punktu $\mathcal{O}$. W ten sposób funkcja $\mathbf{f}(t)$ określa zbiór punktów na płaszczyźnie, bądź w przestrzeni. W naszym przykładzie tym zbiorem jest prosta. Innym przykładem, przy ustalonym układzie współrzędnych $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, może być funkcja

$$\mathbf{f}(t) = (\cos t)\mathbf{e}_1 + (\sin t)\mathbf{e}_2, \qquad 0 \leqslant t < 2\pi. \tag{2}$$

Zbiorem punktów określonych przez tą funkcję jest okrąg. Mówimy, że funkcja $\mathbf{f}(t)$ *parametryzuje* określony przez siebie zbiór punktów.

6.2 Bardzo wygodnie jest myśleć o funkcji o wartościach wektorowych $\mathbf{f}(t)$ jako opisującej ruch punktu na płaszczyźnie, czy w przestrzeni. Punkt określony jest przez wektor wodzący $\mathbf{f}(t)$, a zmienna niezależna t (często nazywana *parametrem*) interpretowana jest jako czas. Na przykład, (1) opisuje ruch punktu po prostej. W czasie $t = 0$ znajduje się w miejscu $\mathbf{b}$, a w czasie $t = 1$ w punkcie $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Podobnie, (2) opisuje ruch punktu po okręgu.

6.3 Ustalmy na płaszczyźnie prostokątny układ współrzędnych o środku w punkcie $\mathcal{O}$ i wektorach bazowych $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Funkcję o wartościach wektorowych $t \mapsto \mathbf{f}(t)$ możemy zapisać jako

$$\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2.$$

Innymi słowy funkcja o wartościach wektorowych jest po prostu parą zwykłych (o wartościach rzeczywistych) funkcji

$$t \mapsto x(t), \qquad t \mapsto y(t).$$

Mówimy, że są to *funkcje składowe* funkcji $\mathbf{f}(t)$. Przypomnijmy przykład (1). Niech wektor $\mathbf{a}$ ma współrzędne (a_1, a_2), a wektor $\mathbf{b}$ współrzędne (b_1, b_2). Wtedy

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2,$$

a więc

$$\mathbf{f}(t) = t(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) + (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2) = (a_1t + b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2t + b_2)\mathbf{e}_2.$$

Funkcjami składowymi są więc funkcje liniowe

$$x(t) = a_1t + b_1, \qquad y(t) = a_2t + b_2.$$

W przykładzie (2) funkcjami składowymi są, oczywiście

$$x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \sin t.$$

Funkcję o wartościach wektorowych $\mathbf{f}(t)$ można również zapisać we współrzędnych biegunowych jako

$$t \mapsto r(t), \qquad t \mapsto \theta(t).$$

Funkcja (2) w tej reprezentacji przyjmuje bardzo prostą postać

$$r(t) = 1, \qquad \theta(t) = t.$$

6.4 Korzystając z faktu, że funkcje o wartościach wektorowych są równoważne parom funkcji rzeczywistych wprowadzamy dla nich wszystkie pojęcia rachunku różniczkowego. Mówimy, że $\mathbf{f}(t)$ jest *ograniczona* na odcinku, jeżeli na tym odcinku ograniczone są obie jej składowe. Mówimy, że jest *ciągła* w punkcie, jeżeli obie składowe są ciągłe w tym punkcie. Zapis

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$$

oznacza po prostu

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a, \qquad \lim_{t \to t_0} y(t) = b.$$

Podobnie z granicami jednostronnymi i granicami w nieskończoności.

Pochodna jest zdefiniowana jako

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \mathbf{f}'(t) = \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_2,$$

jeżeli x' i y' jednocześnie istnieją. Dla ustalonego t $\mathbf{f}'(t)$ jest wektorem, dla wszystkich t $\mathbf{f}'(t)$ jest funkcją o wartościach wektorowych. Możemy ją zróżniczkować ponownie

$$\frac{d^2\mathbf{f}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{e}_1 + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{e}_2,$$

i tak dalej.

Różniczkowanie po t często oznacza się przy pomocy kropki

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \dot{\mathbf{f}}, \qquad \frac{dx}{dt} = \dot{x}.$$

Poprzednie wzory możemy więc zapisać jako

$$\dot{\mathbf{f}} = \dot{x}\mathbf{e}_1 + \dot{y}\mathbf{e}_2, \qquad \ddot{\mathbf{f}} = \ddot{x}\mathbf{e}_1 + \ddot{y}\mathbf{e}_2.$$

Najczęściej nie ma potrzeby przypominania wektorów bazowych. Możemy po prostu pisać

$$\mathbf{f} = (x, y), \qquad \dot{\mathbf{f}}(\dot{x}, \dot{y}), \qquad \ddot{\mathbf{f}} = (\ddot{x}, \ddot{y}).$$

Funkcja o wartościach wektorowych $t \mapsto \mathbf{F}(t)$ nazywa się *pierwotną* funkcji $\mathbf{f}(t)$ jeżeli

$$\mathbf{F}'(t) = \mathbf{f}(t).$$

Całka funkcji o wartościach wektorowych jest zdefiniowana w sposób oczywisty

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)dt = \left(\int_a^b x(t)dt\right)\mathbf{e}_1 + \left(\int_a^b y(t)dt\right)\mathbf{e}_2.$$

Całka jest więc wektorem.

6.5 Własności pochodnej i całki mogą być łatwo przeniesione z funkcji o wartościach rzeczywistych.

(a) Różniczkowanie iloczynu liczby przez wektor

$$\frac{d(\alpha(t)\mathbf{f}(t))}{dt} = \frac{d\alpha(t)}{dt}\mathbf{f}(t) + \alpha(t)\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt},$$

czyli

$$\dot{(\alpha\mathbf{f})} = \dot{\alpha}\mathbf{f} + \alpha\dot{\mathbf{f}}.$$

(b) Jeżeli $\dot{\mathbf{f}}(t) \equiv 0$ to $\mathbf{f}(t)$ jest stała.

(c) Zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego: Część pierwsza.

$$\frac{d}{dt}\int_a^\tau \mathbf{f}(t)dt = \mathbf{f}(\tau),$$

jeżeli $\mathbf{f}$ jest ciągła w punkcie $t = \tau$.

(d) Zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego: Część druga. Jeżeli $\mathbf{f}(t)$ jest ciągła i ograniczona dla $a < t < b$, a $\mathbf{F}(t)$ jest pierwotną $\mathbf{f}(t)$ to

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)dt = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a).$$

(e) Granica długości jest długością granicy.

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{f}(t) = \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to t_0}|\mathbf{f}(t)| = |\mathbf{a}|.$$

6.6 Współrzędne wektora zależą od wyboru bazy. Jest więc ważne, żeby upewnić się, że podane powyżej definicje ograniczoności, ciągłości, pochodnej i inne nie zależą od wyboru bazy. Podamy więc opis powyższych pojęć nie korzystający z konkretnej bazy ani funkcji składowych.

(1) Funkcja o wartościach wektorowych $t \mapsto \mathbf{f}(t)$ jest ograniczona na przedziale wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczona na tym przedziale funkcja rzeczywista $t \mapsto |\mathbf{f}(t)|$.

(2) Funkcja $\mathbf{f}(t)$ określona w otoczeniu t_0 jest w t_0 ciągła wtedy i tylko wtedy gdy

$$\lim_{t\to t_0}|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)| = 0.$$

(3) Niech $\mathbf{f}(t)$ będzie określona w otoczeniu t_0. Wtedy

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{f}(t) = \mathbf{a}$$

wtedy i tylko wtedy gdy

$$\lim_{t\to t_0}|\mathbf{f}(t) - \mathbf{a}| = 0.$$

(4) Niech $\mathbf{f}(t)$ będzie określona w otoczeniu t_0. Wtedy

$$\mathbf{f}'(t_0) = \mathbf{a}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0)\right) = \mathbf{a}.$$

6.7 Ustalmy punkt $\mathcal{O}$ (początek układu) i wektory bazowe. Funkcja o wartościach wektorowych określa zbiór punktów na płaszczyźnie. Ten zbiór nie określa samej funkcji jednoznacznie. Dwie różne funkcje o wartościach wektorowych mogą mieć ten sam zbiór wartości. Na przykład dwie funkcje

$$t \mapsto t\mathbf{a}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$
$$t \mapsto t^3\mathbf{a}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

ten sam zbiór wartości, jest to odcinek łączący punkt $\mathcal{O}$ z wektorem wodzącym $\mathbf{a}$ Obie funkcje opisują ruch punktu po tym odcinku, ale w obu przypadkach ruch jest inny.

6.8 Mówimy, że dwie ciągłe funkcje o wartościach wektorowych

$$t \mapsto \mathbf{f}(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

oraz

$$\tau \mapsto \mathbf{g}(\tau), \qquad \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$$

określają tą samą *krzywą zorientowaną* jeżeli istnieje ciągła, rosnąca funkcja

$$\tau \mapsto \varphi(\tau), \qquad \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$$

spełniająca

$$\varphi(\alpha) = a, \qquad \varphi(\beta) = b,$$

taka, że

$$\mathbf{f}(\varphi(\tau)) = \mathbf{g}(\tau), \qquad \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta.$$

Mówimy, że $\mathbf{f}(t)$ powstała z $\mathbf{g}(\tau)$ przez zmianę parametru $\tau \mapsto t = \varphi(\tau)$ ($\mathbf{f}(t)$ jest reparametryzacją $\mathbf{g}(\tau)$).

Krzywą zorientowaną C nazywamy ciągłą funkcję o wartościach wektorowych $\mathbf{f}(t)$, określona na jakimś przedziale $[a, b]$ wraz ze wszystkimi jej reparametryzacjami.

Zauważmy, że zmiana parametru wymaga funkcji rosnącej. Jeżeli

$$\xi \mapsto \psi(\xi) \qquad \alpha \leqslant \xi \leqslant \beta$$

jest funkcją malejącą,

$$\psi(\alpha) = b \qquad \psi(\beta) = a,$$

i zdefiniujemy

$$\mathbf{h}(\xi) = \mathbf{f}(\psi(\xi))$$

to krzywa zorientowana określona przez

$$\xi \mapsto \mathbf{h}(\xi), \qquad \alpha \leqslant \xi \leqslant \beta$$

nazywa się krzywą *przeciwną*, albo *przeciwnie zorientowaną* do krzywej określonej przez $\mathbf{f}$. Koniec krzywej $\mathbf{h}$ jest początkiem krzywej $\mathbf{f}$ i na odwrót. *Trajektorią* krzywej zorientowanej określonej przez funkcję $\mathbf{f}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ nazywamy zbiór wartości funkcji $\mathbf{f}(t)$. Zauważmy, że krzywa zorientowana i krzywa do niej przeciwna mają tą samą trajektorię.

Słowo „krzywa" będzie oznaczać albo krzywą zorientowaną, albo jej trajektorię, w zależności od kontekstu.

6.9 Jeżeli dana jest krzywa zorientowana A zdefiniowana przez

$$t \mapsto \mathbf{f}(t), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

oraz podział

$$t_0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k = t_1,$$

to obcięcie funkcji $\mathbf{f}(t)$ do każdego przedziału $[\lambda_{j-1}, \lambda_j]$ też określa krzywą zorientowaną A_j

$$t \mapsto \mathbf{f}(t), \qquad \lambda_{j-1} \leqslant t \leqslant \lambda_j.$$

Mówimy, że krzywa A_j jest *łukiem* krzywej A, i że A jest *sumą* krzywych A_j

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_k.$$

(Znak sumowania dotyczy sytuacji, gdy koniec jednej krzywej pokrywa się z początkiem następnej.)

6.10 Często wygodnie jest zapisać krzywą zorientowaną nie w postaci parametrycznej

$$t \mapsto \mathbf{f}(t),$$

ale jako wykres funkcji

$$x \mapsto y = \varphi(x).$$

Taki sposób reprezentacji krzywej zorientowanej nosi nazwę reprezentacji nieparametrycznej. Na przykład prosta reprezentowana przez

$$t \mapsto t\mathbf{a} + \mathbf{b},$$

gdzie $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są dwoma ustalonymi wektorami i $\mathbf{a} \neq 0$ ma reprezentację parametryczną

$$x(t) = a_1 t + b_1, \quad y(t) = a_2 t + b_2, \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2).$$

Można łatwo „wyeliminować" t.

$$t = \frac{x - b_1}{a_1}, \quad \text{i} \quad t = \frac{y - b_2}{a_2}.$$

Współrzędne każdego punktu na krzywej spełniają więc

$$\frac{x - b_1}{a_1} = \frac{y - b_2}{a_2},$$

więc

$$y = \frac{a_2}{a_1} x + \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1}.$$

Otrzymaliśmy więc poszukiwaną reprezentację nieparametryczną naszej krzywej zorientowanej (w tym wypadku prostej). Nie zawsze jest to możliwe.

6.11 Znajdziemy teraz parametryczną reprezentację pewnej interesującej krzywej. Rozważmy krążek o promieniu a toczący się poziomo (na przykład po osi X-ów). Niech P oznacza jakiś punkt na obwodzie krążka. Trajektoria punktu P jest krzywą nazywaną *cykloidą*. Zakładając, że krążek toczy się po osi X-ów, i punkt P znajduje się w początku układu w czasie $t = 0$ można wyprowadzić parametryczną reprezentację cykloidy

$$x(t) = a(t - \sin t), \qquad y(t) = a(1 - \cos t).$$

6.12 Niech krzywa zorientowana będzie zadana przy pomocy współrzędnych biegunowych

$$r = f(\theta), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \qquad f(\theta) > 0,$$

gdzie $f(\theta)$ jest ciągła, i spełnia

$$f(2\pi) = f(0).$$

Używając θ jako parametru otrzymujemy reprezentację parametryczną

$$x(t) = f(\theta)\cos\theta, \qquad y(t) = f(\theta)\sin\theta.$$

Zauważmy, że początek i koniec krzywej pokrywają się, czyli krzywa jest *zamknięta*. Łatwo jest stwierdzić, czy punkt P należy do wnętrza krzywej, czy nie. Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych nazywa się *obszarem ograniczonym krzywą*, i składa się z tych punktów o współrzędnych biegunowych $(r, \theta$ spełniających $0 \leqslant r < f(\theta)$. Obliczymy pole A tego obszaru. Niech $A(\theta)$ oznacza pole części naszego obszaru, zawierające punkty o drugiej współrzędnej biegunowej pomiędzy 0 i θ. Ponieważ $A(0) = 0$ i $A(2\pi) = A$, więc oczekujemy równości

$$A = \int_0^{2\pi} A'(\theta)d\theta.$$

Z drugiej strony łatwo się przekonać, korzystając ze wzoru na pole sektora koła, że dla małego $h > 0$

$$\frac{A(\theta + h) - A(\theta)}{h} \sim \frac{1}{2}f(\theta)^2,$$

czyli

$$A'(\theta) = \frac{1}{2}f(\theta)^2.$$

Otrzymaliśmy wzór na pole

$$A = \int_0^{2\pi} f(\theta)^2 d\theta.$$