

Wykład z analizy

TYDZIEŃ 7.

WEKTOR STYCZNY

7.1 Krzywa zorientowana nazywa się *gładką*, jeżeli określona jest przez funkcję o wartościach wektorowych

$$\mathbf{f}(t), \quad a \leq t \leq b,$$

której pochodna $\mathbf{f}'(t)$ istnieje, jest ciągła i

$$\mathbf{f}'(t) \neq \mathbf{0}$$

dla żadnego t . Zamiana parametru $t = \varphi(\tau)$ nazywa się *dopuszczalną* jeżeli $\varphi'(\tau)$ istnieje, jest ciągła, i ściśle dodatnia. Taka zamiana parametru przekształca $\mathbf{f}(t)$ w inną reprezentację $\mathbf{g}(\tau)$

$$\mathbf{g}(\tau) = \mathbf{f}(\varphi(\tau)).$$

Ponieważ

$$\mathbf{g}'(\tau) = \mathbf{f}'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau),$$

więc

$$\mathbf{g}'(\tau) \neq \mathbf{0}.$$

Funkcje $\mathbf{f}(t)$ i $\mathbf{g}(\tau)$ określają tę samą krzywą gładką. Funkcja $\mathbf{f}(t)$ może zostać zapisana we współrzędnych

$$\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2,$$

i najczęściej będziemy ją oznaczać $(x(t), y(t))$. Pochodna to wtedy $(x'(t), y'(t))$ a warunek $\mathbf{f}(t) \neq \mathbf{0}$ jest równoważny

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0.$$

7.2 Niech $f(x)$ będzie zwykłą funkcją o wartościach rzeczywistych dla $a \leq x \leq b$, posiadającą ciągłą pochodną $f'(x)$. Wykres tej funkcji jest gładką krzywą zorientowaną, a określającą ją funkcją o wartościach wektorowych jest

$$(t, f(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Pochodna tej funkcji to $(1, f'(t))$, i jest zawsze wektorem niezerowym.

7.3 Dla krzywej gładkiej określonej przez $\mathbf{f}(t)$ określamy

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{|\mathbf{f}'(t)|} \mathbf{f}'(t).$$

Powyższa definicja zawsze ma sens gdyż, z założenia, $\mathbf{f}'(t) \neq \mathbf{0}$. Wektor $\mathbf{T}(t)$ nazywa się *jednostkowym wektorem stycznym* do krzywej w punkcie $\mathbf{f}(t)$. Zauważmy, że

- (a) $\mathbf{T}(t)$ pozostaje niezmienny przy dopuszczalnej zamianie zmiennych. Niech zamiana zmiennych $\tau \mapsto \varphi(\tau) = t$ zamienia funkcję $\mathbf{f}(t)$ w

$$\mathbf{g}(\tau) = \mathbf{f}(\varphi(\tau)).$$

Rozważmy punkt P na krzywej, zadany przez $\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{g}(\tau_0)$. Różniczkując funkcję złożoną otrzymujemy

$$\mathbf{g}'(\tau) = \varphi'(\tau)\mathbf{f}'(\varphi(\tau)).$$

Ponieważ zamiana zmiennych jest dopuszczalna, więc $\varphi'(\tau) > 0$, i

$$|\mathbf{g}'(\tau)| = \varphi'(\tau)|\mathbf{f}'(\varphi(\tau))|.$$

Podstawiając $\tau = \tau_0$

$$\frac{1}{|\mathbf{g}'(\tau_0)|}\mathbf{g}'(\tau_0) = \frac{1}{|\mathbf{f}'(\varphi(\tau_0))|}\mathbf{f}'(\varphi(\tau_0)) = \frac{1}{|\mathbf{f}'(t_0)|}\mathbf{f}'(t_0).$$

Obie strony równości to jednostkowe wektory styczne do danej krzywej w punkcie P , obliczone przy użyciu różnych reprezentacji krzywej.

- (b) $\mathbf{T}(t)$ jest wektorem jednostkowym, czyli $|\mathbf{T}(t)| = 1$. Rzeczywiście

$$|\mathbf{T}| = \left| \frac{1}{|\mathbf{f}'|}\mathbf{f}' \right| = \frac{1}{|\mathbf{f}'|}|\mathbf{f}'| = 1.$$

- (c) $\mathbf{T}(t)$ jest wektorem stycznym. Przypomnijmy, że pojęcie styczności wprowadziliśmy już badając funkcje o wartościach rzeczywistych. Rozważmy punkt P na krzywej i łuk tej krzywej zawierający P , który jest wykresem funkcji $F(x)$ o wartościach rzeczywistych. Wtedy ten łuk ma reprezentację parametryczną

$$\mathbf{f}(t) = (t, F(t)).$$

Jeżeli $\mathbf{T}(t)$ zapiszemy jako odcinek skierowany $\vec{PQ}$, to okaże się, że prosta przechodząca przez P i Q jest styczna do wykresu $F(x)$ w punkcie P . Niech $P = (x_0, y_0) = (t_0, F(t_0))$. Współczynnik kierunkowy stycznej do krzywej w punkcie P wynosi

$$m = F'(t_0).$$

Tak więc

$$\mathbf{f}'(t_0) = (1, m).$$

Widzimy więc, że wektor $\mathbf{f}'(t_0)$ ma ten sam kierunek co styczna.

7.4 Jeżeli krzywa gładka ma reprezentację $(x(t), y(t))$, to $\mathbf{T}(t)$ ma współrzędne

$$\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, \quad \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.$$

Istotnie, jeśli $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$, to $\mathbf{f}'(t) = (x'(t), y'(t))$, oraz $|\mathbf{f}'(t)|^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2$. Niech $\Theta(t)$ będzie drugą współrzędną biegunową $\mathbf{T}(t)$. Wtedy

$$\operatorname{tg} \Theta(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

7.5 Jeśli krzywa dana jest równaniem we współrzędnych biegunowych

$$r = f(\theta),$$

to posiada reprezentację parametryczną

$$x(\theta) = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \sin \theta,$$

z kątem θ pełniącym rolę parametru. Wtedy

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta.$$

Otrzymujemy więc

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = f(\theta)^2 + f'(\theta)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2.$$

Współrzędne wektora stycznego są więc dane przez

$$\frac{f' \cos \theta - f \sin \theta}{\sqrt{f^2 + (f')^2}}, \quad \frac{f' \sin \theta + f \cos \theta}{\sqrt{f^2 + (f')^2}},$$

a nachylenie stycznej

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{dy}{dx} = \frac{f' \sin \theta + f \cos \theta}{f' \cos \theta - f \sin \theta}.$$