Wykład z analizy

Tydzień 8.

Długość krzywej, krzywizna

8.1 Niech A będzie krzywą gładką, zadaną przez funkcję $\mathbf{f}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. *Długością* krzywej A nazywamy całkę

$$L = \int_a^b |\mathbf{f}'(t)|\, dt,$$

czyli, we współrzędnych,

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

Wielkość ta odpowiada intuicyjnemu pojęciu długości. Żeby się o tym przekonać, niech $L(t)$ będzie intuicyjnie rozumianą długością łuku krzywej A dla wartości parametru pomiędzy a i t. Mamy więc $L(a) = 0$ i długość całej krzywej $L = L(b)$. Oczekujemy też, że funkcja $L(t)$ jest różniczkowalna, i ma ciągłą pochodną. Wtedy musiałoby zachodzić

$$L = \int_a^b L'(t)\, dt.$$

Postaramy się teraz obliczyć wartość $L'(t)$, posługując się naszą intuicją długości. Ustalmy parametr t_0 pomiędzy a i b, i małą liczbę dodatnią h.

$$L(t_0 + h) - L(t_0)$$

jest długością łuku krzywej A odpowiadającego wartościom parametru pomiędzy t_0 i $t_0 + h$. Jeśli zakres parametru jest niewielki, to łuk jest krótki, i jego długość niewiele się różni od odległości pomiędzy jego końcami $\mathbf{f}(t_0 + h)$ i $\mathbf{f}(t_0)$. Różnica ta powinna maleć wraz ze zmniejszeniem h. Ponieważ

$$\frac{L(t_0 + h) - L(t_0)}{h} \sim \frac{|\mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0)}{h},$$

więc, w granicy, oczekujemy

$$L'(t_0) = |\mathbf{f}'(t_0)|.$$

Widzimy więc, że podana definicja jest zgodna z intuicyjnym pojęciem długości.

8.2 Długość zależy tylko od krzywej, a nie od konkretnej parametryzacji. Niech będzie dana funkcja $\mathbf{f}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ i dopuszczalna zamiana zmiennych $\phi(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$. Funkcja $\phi(\tau)$ musi mieć ciągłą pochodną, $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$, oraz $\phi'(\tau) > 0$ dla wszystkich wartości parametru τ. Niech

$$\mathbf{g}(\tau) = \mathbf{f}(\phi(\tau)).$$

Wtedy, różniczkując funkcję złożoną i całkując przez podstawienie otrzymujemy

$$\int_\alpha^\beta |\mathbf{g}'(\tau)|\, d\tau = \int_\alpha^\beta |\mathbf{f}'(\phi(\tau))\phi'(\tau)|\, d\tau = \int_\alpha^\beta |\mathbf{f}'(\phi(\tau))|\phi'(\tau)\, d\tau = \int_a^b |\mathbf{f}'(t)|\, dt.$$

Tak więc długość krzywej jest niezależna od wyboru parametryzacji.

8.3 Jeżeli $A = B + C$, czyli krzywa A składa się z następujących po sobie łuków B i C to korzystając z własności addytywności całki otrzymujemy własność addytywności długości: długość A jest sumą długości B i długości C.

8.4 Jeżeli krzywa jest wykresem funkcji $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, to długość takiej krzywej została już zdefiniowana na wykładzie rachunku różniczkowego funkcji o wartościach rzeczywistych. Nasza obecna definicja jest zgodna z poprzednią. Żeby się o tym przekonać, niech

$$\mathbf{f}(t) = (t, f(t)), \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

będzie parametryzacją danego wykresu.

$$L = \int_a^b |\mathbf{f}'(t)|\, dt = \int_a^b |(1, f'(t))|\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt.$$

Prawa strona to wzór na długość wykresu funkcji o wartościach rzeczywistych.

Przykład. Obliczymy obwód elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > b > 0.$$

Weźmy parametryzację

$$x = a\cos\theta, \qquad y = a\sin\theta, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Otrzymujemy

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\, d\theta.$$

Niech $c^2 = a^2 - b^2$, czyli $c = a\epsilon$, gdzie ϵ oznacza ekscentryczność (mimośród) elipsy. Podstawiając otrzymujemy

$$L = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \epsilon^2\cos^2\theta}\, d\theta = 2a\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \epsilon^2\cos^2\theta}\, d\theta.$$

Otrzymanej całki nie da się zapisać przy pomocy funkcji elementarnych. Jest to tak zwana całka eliptyczna.

8.5 Załóżmy, że krzywa dana jest równaniem we współrzędnych biegunowych

$$r = f(\theta), \qquad \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta.$$

Krzywa ta ma parametryzację

$$x(\theta) = f(\theta)\cos\theta, \qquad y(\theta) = f(\theta)\sin\theta.$$

Wstawiając powyższą parametryzację do wzoru na długość otrzymujemy

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}\, d\theta.$$

8.6 Długość łuku jako parametr. Krzywa gładka ma wiele różnych parametryzacji. Jedna z tych parametryzacji zasługuje na szczególną uwagę. Jest to parametryzacja, w której wartością parametru jest długość łuku krzywej, mierzona od jakiegoś ustalonego punktu na krzywej. Pokażemy teraz jak otrzymać tą parametryzację. Weźmy krzywą gładką określoną przez $\mathbf{f}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Niech L będzie jej długością, a $s(\xi)$ będzie długością łuku krzywej odpowiadającego wartościom parametru od a do ξ. Mamy

$$s(\xi) = \int_a^\xi |\mathbf{f}'(t)|\, dt.$$

$s(\xi)$ jest funkcją ciągłą, rosnącą, $s(a) = 0$ i $s(b) = L$. Pochodna

$$s'(\xi) = |\mathbf{f}'(\xi)|$$

jest ciągła i dodatnia. Istnieje więc funkcja odwrotna $\phi(s)$ spełniająca $\phi(0) = a$, $\phi(L) = b$, oraz

$$\phi'(s(t)) = \frac{1}{|\mathbf{f}(t)|}.$$

Funkcja $\phi(t)$ stanowi więc dopuszczalną zamianę zmiennych. Niech

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}(\phi(s).$$

$\mathbf{g}(s)$, $0 < s < L$ określa tą sama krzywą co $\mathbf{f}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Zauważmy, że

$$\mathbf{g}'(s) = \phi'(s)\mathbf{f}'(\phi(s)) = \frac{1}{|\mathbf{f}'(t)|}\mathbf{f}'(t),$$

gdzie $t = \phi(s)$. Stąd

$$|\mathbf{g}'(s)| = 1.$$

Długość krzywej pomiędzy punktami $g(0)$ i $g(s)$ wynosi s. Fakt, że długość wektora pochodnego jest zawsze równa 1 upraszcza wzory. Jeżeli

$$\mathbf{g}(s) = (x(s), y(s)),$$

to

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(s) = (x'(s), y'(s)), &\qquad \mathbf{N}(s) = (-y'(s), x'(s)), \\ \cos\Theta = x'(s), &\qquad \sin\Theta = y'(s). \end{aligned}$$

(Definicja wektora $\mathbf{N}(s)$ była w zadaniach.)

8.7 Rozważmy krzywą gładką A zadaną przez funkcję $\mathbf{f}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, która posiada ciągłe pochodne drugiego rzędu. Miarą „krzywizny” krzywej jest prędkość zmian kąta biegunowego jednostkowego wektora stycznego, czyli prędkość z jaką jednostkowy wektor styczny zmienia kierunek. Ustalamy, że parametrem względem którego mierzymy tą prędkość jest długość łuku. Niech $\mathbf{g}(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$ będzie parametryzacją krzywej A przy pomocy długości łuku. *Krzywiznę* krzywej A w punkcie $\mathbf{g}(s)$ definiujemy jako

$$\kappa(s) = \frac{d\Theta(s)}{ds}.$$

Jeżeli pracujemy z parametryzacją $\mathbf{f}(t)$ to otrzymujemy wzór

$$\kappa(t) = \frac{d\Theta}{ds} = \frac{d\Theta}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\Theta'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|}.$$

Zapiszemy wzór na krzywiznę we współrzędnych, dla funkcji $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$.

$$\Theta(t) = \operatorname{arctg}\frac{y'(t)}{x'(t)},$$

a więc

$$\Theta'(t) = \frac{1}{1 + y'(t)^2/x'(t)^2}\,\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

W punktach, gdzie $x'(t) = 0$ wychodzimy od wzoru na $\operatorname{ctg}\Theta$, i otrzymujemy to samo. Dzieląc otrzymany wzór przez $|\mathbf{f}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ otrzymujemy

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}}.$$

8.8 Można się łatwo przekonać, że $|\kappa(t)|$ nie zależy od wyboru układu współrzędnych, natomiast znak $\kappa(t)$ zależy od wyboru orientacji płaszczyzny. Punkty w których $\kappa(t)$ zmienia znak występują więc niezależnie od wyboru układu współrzędnych, i nazywają się punktami przegięcia krzywej. To pojęcie jest zgodne z wprowadzonym wcześniej pojęciem punktu przegięcia wykresu funkcji o wartościach rzeczywistych.

8.9 Jeśli krzywizna κ w punkcie P na krzywej A nie jest 0, to

$$\rho = \frac{1}{|\kappa|}$$

nazywamy *promieniem krzywizny* A w P. *Kołem krzywizny* C krzywej A w P nazywamy okrąg o promieniu ρ styczny do A w P, o tej samej (w P) wypukłości co A. Środek C nazywamy środkiem krzywizny (A w P). Środek ten można wyznaczyć posługując się wektorem normalnym

$$\mathbf{f}(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{N}(t).$$

8.10 Mówimy, że ciągła funkcja $\mathbf{f}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ określa krzywą *kawałkami gładką* jeżeli $\mathbf{f}'(t)$ istnieje, jest ciągła i różna od 0 z wyjątkiem co najwyżej skończonej ilości punktów t przedziału $[a, b]$. Takie punkty nazywają się punktami osobliwymi (singularnymi) krzywej. W każdym nieosobliwym punkcie krzywej kawałkami gładkiej możemy określić wektor $\mathbf{T}(t)$, i możemy obliczyć długość takiej krzywej, o ile całka w definicji długości jest zbieżna.