

Wykład z analizy

TYDZIEŃ 9.

FUNKCJE WIELU ZMIENNYCH

9.1 Funkcją dwóch zmiennych nazywamy przyporządkowanie parom (uporządkowanym) liczb innej liczby. Zbiór wszystkich par, którym przyporządkowana została liczba, nazywamy dziedziną funkcji. Jeżeli zdefiniowana jest funkcja dwóch zmiennych bez określenia konkretnej dziedziny, to rozumiemy, że dziedziną są wszystkie pary dla których definicja ma sens. Suma, różnica, iloczyn, iloraz i złożenie są określone tak jak dla funkcji jednej zmiennej.

9.2 Przykłady: (a) Wzór

$$(x, y) \mapsto x + y$$

przyporządkowuje każdej parze liczb ich sumę. Dziedziną tej funkcji są wszystkie pary (x, y) .

(b) Wzór

$$(x, y) \mapsto z = \begin{cases} x^2 + y & \text{dla } y \leq 0 \\ \frac{x^3 + xy}{y} & \text{dla } x > 0, y > 0 \\ 315 & \text{dla } x \leq 0, y > 0 \end{cases}$$

określa funkcję dwóch zmiennych której dziedziną są wszystkie pary (x, y) .

9.3 Zbiór

$$\{(x, y); \alpha_0 < x < \alpha_1, \beta_0 < y < \beta_1\}$$

nazywamy *przedziałem otwartym*. Innymi słowy przedziałem otwartym jest dowolny prostokąt o bokach równoległych do osi współrzędnych (bez samych boków). Przecięcie przekątnych tego prostokąta, czyli punkt

$$\left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}, \frac{\beta_0 + \beta_1}{2} \right)$$

nazywamy *środkiem* przedziału. Same boki prostokąta (nie należące do samego przedziału otwartego) nazywamy *brzegiem* przedziału. Przedział otwarty z dodanym swoim brzegiem nazywa się *przedziałem domkniętym*. Jest to więc zbiór

$$\{(x, y); \alpha_0 \leq x \leq \alpha_1, \beta_0 \leq y \leq \beta_1\}.$$

Będziemy często używać wyrażenia „blisko punktu P ” (na płaszczyźnie), i będzie to oznaczało „w pewnym przedziale otwartym o środku w P ”. Zauważmy, że skoro w każdym otwartym przedziale można zmieścić dysk o tym samym środku, a w każdym dysku można zmieścić otwarty przedział o tym samym środku, więc „blisko punktu P ” można równoważnie odczytać jako „w pewnym dysku o środku w P ”, lub „we wszystkich punktach Q których odległość od P nie przekracza pewnej ustalonej liczby”.

9.4 Pojęcie ciągłości funkcji dwóch zmiennych nie różni się od pojęcia ciągłości funkcji jednej zmiennej. Funkcja $f(x, y)$ jest ciągła, jeżeli mała zmiana x i y powoduje małą zmianę $f(x, y)$. Mamy następującą definicję

Definicja. Funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w punkcie (x_0, y_0) jeżeli posiada następujące dwie własności:

- (I) jeżeli A jest dowolną liczbą taką, że $f(x_0, y_0) < A$ to $f(x, y) < A$ dla wszystkich punktów (x, y) blisko (x_0, y_0) , dla których $f(x, y)$ jest określona,
- (II) jeżeli B jest dowolną liczbą taką, że $f(x_0, y_0) > B$ to $f(x, y) > B$ dla wszystkich punktów (x, y) blisko (x_0, y_0) , dla których $f(x, y)$ jest określona.

Podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej możemy sformułować równoważną definicję ϵ - δ : $f(x, y)$ jest ciągła w punkcie (x_0, y_0) jeżeli dla każdej dodatniej liczby ϵ możemy znaleźć dodatnią liczbę δ taką, że

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$$

dla wszystkich (x, y) dla których $f(x, y)$ jest określona i

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Funkcję nazywamy ciągłą na zbiorze S jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

9.5 Suma, różnica, iloczyn, iloraz (poza zerami mianownika) i złożenie funkcji ciągłych są ciągłe. Dowody tych faktów nie różnią się od dowodów w przypadku funkcji jednej zmiennej. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą funkcją jednej zmiennej, to funkcje dwóch zmiennych

$$F(x, y) = f(x) \quad \text{i} \quad G(x, y) = f(y)$$

też są ciągłe. Tak więc każdy *jednomian*

$$cx^n y^m, \quad m, n \geq 0$$

jest ciągły. Również każdy wielomian dwóch zmiennych (skończona suma jednomianów) jest ciągły. Funkcja wymierna (iloraz wielomianów) jest ciągła poza zerami mianowników.

9.6 Przykłady: (a) Funkcja

$$(x, y) \mapsto e^{\sin(x^2+2y)} + \cos(xy)$$

jest określona i ciągła wszędzie, gdyż jest sumą dwóch funkcji, każda z których składa się z wielomianu złożonego z funkcją ciągłą jednej zmiennej.

(b) Rozważmy funkcję

$$\phi(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{dla } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = y = 0. \end{cases}$$

Funkcja ta jest określona wszędzie, jest funkcją wymierną, i jedynym zerem mianownika jest punkt $(0, 0)$. Jest więc ciągła wszędzie poza $(0, 0)$. Zauważmy, że $\phi(x, y)$ jest ciągła względem każdej ze zmiennych z osobna. Jeżeli $y = y_0$, $y_0 \neq 0$, to otrzymujemy funkcję wymierną jednej zmiennej

$$x \mapsto \frac{xy_0}{(x^2 + y_0^2)^2},$$

która nie ma zer mianownika, jest więc ciągła. Jeżeli $y_0 = 0$, to otrzymujemy funkcję

$$x \mapsto 0,$$

która też jest ciągła. Podobnie, jeżeli ustalimy zmienną x i rozważymy naszą funkcję jako funkcję zmiennej y . Z drugiej strony zauważmy, że $\phi(x, y)$, jako funkcja dwóch zmiennych nie jest ciągła w $(0, 0)$. $\phi(0, 0) = 0 < 1$, a z drugiej strony w każdym przedziale otwartym o środku w $(0, 0)$ znajdziemy punkty (x, y) w których $\phi(x, y) > 1$ – na przykład punkty postaci (t, t) dla $0 < t < \frac{1}{2}$:

$$\phi(t, t) = \frac{t \cdot t}{(t^2 + t^2)^2} = \frac{t^2}{4t^4} = \frac{1}{4t^2} > 1 \quad 0 < t < 1/2.$$

9.7 Definicja funkcji 3 i więcej zmiennych jest całkowicie analogiczna do przypadku 2 zmiennych. Funkcja n zmiennych to przyporządkowanie n liczbom rzeczywistym innej liczby

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto u = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Często używamy zapisu wektorowego

$$\mathbf{x} \mapsto u = f(\mathbf{x}).$$

Otwartym n -wymiarowym przedziałem nazywamy zbiór wszystkich punktów $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ spełniających, dla pewnych liczb $\alpha_i < \beta_i$, $i = 1, \dots, n$, nierówności

$$\alpha_i < x_i < \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Domknięty przedział, to zbiór punktów spełniających

$$\alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Punkt o współrzędnych

$$x_i = \frac{\alpha_i + \beta_i}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

jest środkiem powyższych przedziałów. Mając pojęcie przedziału otwartego określamy pojęcie bliskości punktów, i ciągłości funkcji. Przytoczymy definicję ϵ - δ dla funkcji n zmiennych. Funkcja $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$ określona w $\mathbf{x}_0$ jest w tym punkcie ciągła, jeżeli dla dowolnego dodatniego ϵ można znaleźć dodatnie δ takie, że

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \epsilon$$

dla wszystkich $\mathbf{x}$ dla których $f(\mathbf{x})$ jest określona i $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}| < \delta$. Różne fakty o funkcjach ciągłych omawiane wcześniej w przypadku 2 zmiennych pozostają prawdziwe.

9.8 Niech S będzie zbiorem punktów, a P punktem. Stawiamy pytanie, czy można znaleźć przedział o środku w P który nie zawiera punktów zbioru S poza, być może, P . Jeżeli jest to niemożliwe, to punkt P nazywamy *punktem skupienia* zbioru S . Innymi słowy, P jest punktem skupienia zbioru S , jeżeli dowolnie blisko P znajdziemy punkty S różne od P . Niech dana będzie funkcja $f(\mathbf{x})$ określona na zbiorze S . Niech punkt $\mathbf{x}_0$ będzie punktem skupienia S (funkcja $f(\mathbf{x})$ może być w $\mathbf{x}_0$ określona lub nie). Jeżeli istnieje liczba α taka że po określeniu $f(\mathbf{x}_0) = \alpha$ otrzymamy funkcję ciągłą, to α nazywamy *granicą* funkcji $f(\mathbf{x})$ w $\mathbf{x}_0$ i zapisujemy

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \alpha.$$

W szczególności powyższy zapis oznacza, że $\mathbf{x}_0$ jest punktem skupienia dziedziny $f(\mathbf{x})$. Nie określamy pojęcia granicy w innych punktach. Analogicznie do przypadku jednej zmiennej możemy udowodnić własności granic, a także zdefiniować granice nieskończone.

9.9 Przykłady: (a) Jaka jest granica $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^4$ w punkcie $(-7, 2)$? Funkcja $f(x, y)$ jest wielomianem, więc jest określona i ciągła wszędzie. Tak więc

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (-7, 2)} f(x, y) = f(-7, 2) = 93.$$

(b) Czy funkcja $f(x, y) = \sin \log(x^4 + y^2)$ ma granicę gdy $(x, y) \rightarrow (0, 0)$? Punkt $(0, 0)$ jest punktem skupienia dziedziny funkcji $f(x, y)$, chociaż funkcja w tym punkcie nie jest określona. Zauważmy jednak, że granica nie istnieje. W każdym przedziale o środku w $(0, 0)$ znajdziemy punkty w których funkcja przyjmuje i wartości 1 i, na przykład, -1 . Nie da się w żaden sposób określić $f(0, 0)$ tak aby $f(x, y)$ była w tym punkcie ciągła.

9.10. W przypadku funkcji jednej zmiennej dziedziną zawsze był przedział, bądź kilka przedziałów. Łatwo zauważyć, że w przypadku funkcji wielu zmiennych dziedziny najczęściej nie da się łatwo opisać przy pomocy przedziałów. Określimy sobie teraz pojęcie zbioru otwartego i brzegu zbioru. Zbiór nazywa się *otwarty* jeżeli wraz z każdym punktem P zawiera jakiś otwarty przedział o środku w P . Zauważmy, że przedział otwarty jest zbiorem otwartym, a przedział domknięty nie jest zbiorem otwartym. Zbiór pusty też nazywamy otwartym. Punkt P nazywa się punktem *brzegowym* zbioru S , jeżeli dowolny otwarty

przedział o środku w P zawiera i punkty z S i punkty spoza S . Zbiór wszystkich punktów brzegowych nazywa się *brzegiem* zbioru. Funkcje wielu zmiennych będą określone na zbiorach otwartych, być może wraz z częścią brzegu.

Uwaga: Pojęcie zbioru otwartego i brzegu zależy od przestrzeni w jakiej się znajdujemy. Na przykład, odcinek $(0, 1)$ jest zbiorem otwartym jeżeli rozpatrujemy go jako podzbiór prostej. W tym przypadku jego brzegiem będą punkty 0 i 1. Jeżeli natomiast ten przedział rozpatrywać jako podzbiór płaszczyzny, to nie jest zbiorem otwartym, a jego brzegiem jest cały odcinek $[0, 1]$.