Wykład z analizy falkowej

LISTA 1.

15.10.02.

ZADANIA

1 Niech $L^2([-\pi,\pi])$ będzie przestrzenią funkcji o wartościach rzeczywistych całkowalnych z kwadratem na odcinku $[-\pi,\pi]$, czyli

$$\int_{\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx < \infty.$$

Określamy następujący zbiór funkcji z $L^2([-\pi,\pi])$:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Definiujemy poprzestrzeń P funkcji parzystych, czyli takich, że $f(x) = f(-x)$, i podprzestrzeń N funkcji nieparzystych, czyli takich, że $f(-x) = -f(x)$.

(1) pokaż, że zdefiniowany zbiór funkcji stanowi układ ortonormalny w $L^2([-\pi,\pi])$,
(2) pokaż, że każdą funkcję $f \in L^2([-\pi,\pi])$ można przedstawić w postaci

$$f = f_P + f_N, \qquad f_P \in P, \quad f_N \in N,$$

(3) wiedząc, że zdefiniowany układ ortonormalny jest bazą $L^2([-\pi,\pi])$ znajdź bazy ortonormalne P i N,
(4) pokaż, że $L^2([-\pi,\pi]) = P \oplus N$.

2 Dana jest macierz

$$T = \begin{pmatrix} 1,1,0 \\ 0,2,0 \\ 1,3,1 \end{pmatrix},$$

i niech wektory x_1, x_2, x_3 będą kolumnami T.

(1) Pokaż, że wektory x_1, x_2, x_3 są bazą przestrzeni $\mathbf{R}^3$ i że nie jest to baza ortonormalna,
(2) stosując procedurę Grama-Schmidta dokonaj ortonormalizacji tej bazy,
(3) wyznacz rozwinięcie wektora $y = [-3, 2, 1]$ względem znalezionej bazy ortonormalnej,
(4) sprawdź, czy dla powyższego rozwinięcia zachodzi równość Parsevala.

3 Niech układ wektorów $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_N$ będzie bazą ortonormaln ąprzestrzeni $\mathbf{R}^N$. Niech $\mathbf{N}$ będzie podprzestrzenią rozpiętą przez pierwszych k wektorów $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_k$ $(0 < k < N)$. Niech dla wektora $y = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{x}_i$ $\hat{y}$ oznacza najbliższy niemu element N (czyli tak zwany „rzut ortogonalny” y na N). Pokaż, że $\hat{y} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i$