Wykład z analizy falkowej

Lista 3.

26.11.02.

Zadania

1. $\phi(t)$ jest funkcją całkowalną, całkowalną z kwadratem, $\int_{\mathbf{R}} \phi(t)dt \neq 0$, i spełnia równanie

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \phi(2t-n), \tag{1}$$

(czyli takie równanie, jakie spełnia funkcja skalująca analizy wielorozdzielczej). Udowodnij, że

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n = \sqrt{2}.$$

Wsk.: Scałkuj i zamień kolejność sumowania i całkowania.

2. Jeśli funkcja $\phi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ spełnia równanie rekurencyjne (1) i całkowite przesunięcia funkcji $\phi(t)$ tworzą układ ortonormalny to

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n h_{n-2m} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli} \quad m = 0 \\ 0 & \text{jeśli} \quad m \neq 0. \end{cases}$$

Wsk.: Podobna jak w poprzednim zadaniu.

3. W sytuacji takiej, jak w zadaniu 1. i 2. pokaż, że

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{2n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4. W sytuacji takiej jak w zadaniu 2. jeżeli dodatkowo funkcja $\phi(t)$ jest zerem poza odcinkiem $[0, N-1]$ to ciąg $\{h_n\}$ ma nie więcej niż N niezerowych składaników.