

### Wykład 3.

#### Analiza wielorozdzielcza i konstrukcja falek

Przedmiotem naszego zainteresowania są bazy falkowe w przestrzeni  $L^2(\mathbf{R})$ , których elementy są funkcjami o dobrej lokalizacji w czasie i w częstotliwości. Falką nazywamy funkcję  $\psi \in L^2(\mathbf{R})$  taką, że układ funkcji

$$(3.1) \quad \{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k); j, k \in \mathbf{Z}\}$$

jest bazą o. n. przestrzeni  $L^2(\mathbf{R})$ . Nazwa „falka” bierze się stąd, że  $\psi$  najczęściej jest prostą, elementarną oscylacją. Bazę (3.1) określoną przez falkę  $\psi$  nazywamy bazą falkową. Zainteresowanie bazami falkowymi wzięło się stąd, że w latach 80 odkryto, że bazy powstające w ten sposób (z jednej funkcji, przez przesunięcia i skalowanie) prowadzą do efektywnych algorytmów numerycznych. Osobą, która pierwsza zwróciła na to uwagę był francuski inżynier Morlet, który we wczesnych latach 80 pracował dla przedsiębiorstwa naftowego Elf Aquitaine. Poszukiwanie złóż ropy naftowej polegało na wywoływaniu na powierzchni ziemi fal sejsmicznych (przy pomocy ładunków wybuchowych) a następnie analizowaniu zarejestrowanych odbić. Różne warstwy można poznać po charakterystycznych częstotliwościach, które są najsilniej odbijane, a głębokość warstw można wyliczyć analizując przesunięcie w czasie pojawiających się odbić. Morlet zauważył, że analiza sygnału przy pomocy bazy falkowej jest numerycznie bardzo efektywna. Morlet używał tak zwanej ciągłej transformaty falkowej, z której wywodzą się, przez próbkowanie, bazy falkowe. Bazy falkowe w ostatnich czasach zrobiły dużą karierę i w dziedzinie zastosowań i z punktu widzenia teorii, w matematyce i fizyce. Kiedy pojawiło się zainteresowanie falkami od dawna znana była już falka Haara (która widzieliśmy w rozdziale 1)

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1/2), \\ -1 & x \in [1/2, 1) \\ 0 & x \notin [0, 1). \end{cases}$$

Budując bazę falkową  $\{\psi_{j,k}\}$  według schematu (3.1) widzimy, że funkcja  $\psi_{j,k}$  stanowi jednostkową, elementarną oscylację o czasie trwania  $2^{-j}$ , zlokalizowaną w przedziale  $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$ . Rozkład sygnału w bazie falkowej Haara jest więc rozkładem na elementarne oscylacje o określonej częstotliwości i określonym miejscu w czasie. Z punktu widzenia zastosowań falka Haara ma wadę - jest nieciągła. Naszym celem będzie konstrukcja różnych innych falek.

Podstawowym narzędziem w konstrukcji falek jest tak zwana analiza wielorozdzielcza.

**Analiza wielorozdzielcza.** Analizą wielorozdzielczą (w skrócie MRA) nazywamy rosnący ciąg podprzestrzeni domkniętych  $L^2(\mathbf{R})$

$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset L^2(\mathbf{R}),$$

spełniających następujące warunki

- (a)  $\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = L^2(\mathbf{R})$ .
- (b)  $\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$ .
- (c)  $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$ .
- (d)  $\exists \varphi \in V_0$  taka, że układ  $\{\varphi(x-n); n \in \mathbf{Z}\}$  stanowi bazę o. n. przestrzeni  $V_0$ .  $\varphi$  nazywamy funkcją skalującą analizy.

Warunki (a) i (b) oznaczają, że rosnący ciąg podprzestrzeni jest nietrywialny i wypełnia wszystko. W (a) kreska oznacza domknięcie. Przestrzenie  $V_j$  rosnąc wypełniają całą przestrzeń  $L^2(\mathbf{R})$ . Do każdego

elementu  $f \in L^2(\mathbf{R})$  można podejść dowolnie blisko elementami przestrzeni  $V_j$  (dla odpowiednio dużego  $j$ ):

$$\forall \epsilon > 0 \forall f \in L^2(\mathbf{R}) \exists j \in \mathbf{Z} \exists g \in V_j \quad \|f - g\| < \epsilon.$$

Można to też sformułować tak: jeżeli  $f \in L^2(\mathbf{R})$  jest prostopadła do wszystkich przestrzeni  $V_j$ , to  $f = 0$ . Warunki (a) i (b) w praktyce są łatwe do sprawdzenia i spełnienia. Tak naprawdę jeżeli spełnione jest (c) i (d) to (b) automatycznie też, a (a) sprowadza się do prostego warunku na funkcję  $\varphi$ . Na przykład, jeżeli  $\hat{\varphi}$  jest ciągła w 0 to warunkiem gwarantującym (a) jest  $|\hat{\varphi}(0)| = 1$ . Warunki (c) i (d) są najważniejsze. (c) mówi, że każda następna, większa przestrzeń jest przeskalowaną, przez czynnik 2 kopią poprzedniej. Jest to równoważne stwierdzeniu, że

$$f \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}x) \in V_0.$$

Można myśleć o tym tak, że elementy w każdej kolejnej podprzestrzeni mogą mieć coraz więcej szczegółów, i odwrotnie, w każdej poprzedniej podprzestrzeni coraz mniej szczegółów. Warunek (d) oznacza, że ustalona podprzestrzeń  $V_0$  w ciągu ma ustalony poziom rozdzielczości - przestrzeń jest niezmiennicza na przesunięcia o liczby całkowite i jest „rozpinana” przez przesunięcia jednaj, referencyjnej funkcji-matki. Jak zobaczymy własności konstruowanych falek, takie jak ciągłość czy różniczkowalność, będą odzwierciedlały własności funkcji  $\varphi$ .

**Uwaga.** • Z powyższej definicji wynika, że analiza wielorozdzielcza to dwie rzeczy - rosnący ciąg podprzestrzeni domkniętych  $\{V_j\}$  i funkcja  $\varphi \in V_0$ , spełniające odpowiednie warunki. Analizą wielorozdzielczą jest więc para  $(\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}, \varphi)$ .

• W praktyce często stosuje się nieco inną definicję. W (d) zamiast warunku, że układ  $\{\varphi(x-n); n \in \mathbf{Z}\}$  stanowi bazę o. n. przestrzeni  $V_0$  wymagamy, aby stanowił bazę Riesz. Jest to nieco słabszy warunek. Tak zdefiniowaną analizę wielorozdzielczą nazywamy analizą wielorozdzielczą Riesz. Naszą zwykłą analizę, dla podkreślenia w razie potrzeby, będziemy też nazywali analizą wielorozdzielczą ortonormalną. Komentarz dotyczący spełnienia warunków (a) i (b) definicji odnosi się też do analizy Riesz, chociaż inny jest warunek na  $\varphi$ .

• Okazuje się, że jeżeli  $(\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}, \varphi)$  jest analizą Riesz, to w  $V_0$  zawsze można znaleźć inną, zmodyfikowaną funkcję skalującą  $\tilde{\varphi}$ , taką, że  $(\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}, \tilde{\varphi})$  jest analizą ortonormalną. Pomimo tego często wygodniej jest jednak pracować z funkcją  $\varphi$  (generującą bazę Riesz) niż  $\tilde{\varphi}$  (generującą bazę o. n.), gdy  $\varphi$  dana jest prostym wzorem a  $\tilde{\varphi}$  zawiłym.

Konstrukcja falek nastąpi teraz w 2 krokach. Najpierw pokażemy, że analiza wielorozdzielcza zawsze daje nam falekę (będzie to pewna szczególna funkcja, która wybierzemy z przestrzeni  $V_1$ ), a następnie skonstruujemy potrzebne analizy wielorozdzielcze.

**Przykłady.** Analiza Haara. Jest to najprostszy przykład MRA. Z tej analizy powstaje falka Haara.

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbf{R}); f \text{ jest stała na przedziałach } [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)), k \in \mathbf{Z}\}.$$

Funkcję skalującą określamy przez

$$(3.2) \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1), \\ 0 & x \notin [0, 1). \end{cases}$$

Zauważmy, że  $V_j \subset V_{j+1}$ . Wynika to stąd, że wraz ze wzrostem  $j$  długość przedziałów  $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$  maleje, i każdy taki krótszy przedział w całości zawiera się w którymś z przedziałów poprzedniego poziomu: jeżeli  $k$  jest parzyste to

$$\left[2^{-(j+1)}k, 2^{-(j+1)}(k+1)\right) \subset \left[2^{-j}(k/2), 2^{-j}(k/2+1)\right),$$

a jeżeli  $k$  jest nieparzyste to

$$\left[2^{-(j+1)}k, 2^{-(j+1)}(k+1)\right) \subset \left[2^{-j}(k-1)/2, 2^{-j}(k+1)/2\right).$$

Jeżeli  $f$  jest stała na każdym dłuższym przedziale, to jest też stała na każdym krótszym. Rozważmy warunek (c).

$$x \in [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)) \Leftrightarrow 2x \in [2^{-(j+1)}k, 2^{-(j+1)}(k+1)).$$

Widać, że  $f$  jest stała na przedziale z lewej strony wtedy i tylko wtedy gdy  $f(2x)$  jest stała na przedziale z prawej strony (to jest ta sama stała wartość). Stąd (c). Sprawdźmy teraz warunek (d), to znaczy, że układ

$$(3.3) \quad \{\varphi(x-n); n \in \mathbf{Z}\}$$

stanowi bazę o. n.  $V_0$ . Łatwo sprawdzić korzystając z definicji, że układ (3.3) stanowi układ ortonormalny. Pozostaje więc sprawdzić, czy jest bazą w  $V_0$ , czyli czy kombinacje liniowe elementów (3.3) leżą gęsto w  $V_0$ . Niech  $f \in V_0$ .  $f$  jest stała na każdym przedziale postaci  $[k, k+1)$ , i niech ta stała wartość wynosi  $f_k$ . Zauważmy, że ciąg  $f_k$  jest sumowalny z kwadratem

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2,$$

a więc

$$(3.4) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2 < \infty.$$

Niech  $f_N$  będzie obcięciem funkcji  $f$  do przedziału  $[-N, N)$ , czyli

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [-N, N) \\ 0 & x \notin [-N, N). \end{cases}$$

Wtedy  $f_N$  jest kombinacją liniową elementów (3.3)

$$f_N(x) = \sum_{k=-N}^{N-1} f_k \varphi(x-k).$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|^2 &= \int_{-\infty}^{-N} |f(x)|^2 dx + \int_N^{\infty} |f(x)|^2 dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-N-1} |f_k|^2 + \sum_{k=N}^{\infty} |f_k|^2. \end{aligned}$$

Dwie ostatnie reszty dążą do 0 gdy  $N \rightarrow \infty$ , ze względu na (3.4). Tak więc

$$f_N \rightarrow f \quad \text{w } L^2(\mathbf{R}),$$

a więc kombinacje liniowe elementów (3.3) leżą dowolnie blisko każdego elementu  $V_0$ , więc (3.3) jest bazą. W końcu obliczmy

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_0^1 e^{-i\xi x} dx = \frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \Big|_0^1 = \frac{e^{-i\xi} - 1}{-i\xi} = e^{-i\xi/2} \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}.$$

Transformata  $\hat{\varphi}$  jest więc ciągła w 0 i ma tam wartość 1. Wykorzystując komentarz zrobiony po definicji MRA widzimy, że wszystkie warunki definicji MRA są spełnione.

Spliny. Oznaczmy przez  $C^n$  zbiór wszystkich funkcji na  $\mathbf{R}$  różniczkowalnych w sposób ciągły  $n$  razy. To znaczy, że jeżeli  $f \in C^n$  to pochodne  $f$  istnieją do rzędu  $n$  włącznie i pochodna najwyższego rzędu jest ciągła. Ustalmy  $n = 1, 2, \dots$  i niech

$V_j = \{f \in C^{n-1} \cap L^2(\mathbf{R}); \text{ na przedziałach postaci } [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)) \text{ } f \text{ jest wielomianem stopnia nie większego niż } n\}$ .

Podobnie jak w przypadku analizy Haara zauważamy, że  $V_j \subset V_{j+1}$  oraz  $f \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$ . Elementy  $V_0$  nazywamy splinami rzędu  $n$  (nie znam dobrego polskiego tłumaczenia). Są to odpowiednio sklejone wielomiany stopnia  $n$  (sklejone tak, żeby przejście w punktach całkowitych było różniczkowalne w sposób ciągły  $n-1$  razy). Znalezienie funkcji skalującej  $\varphi \in V_0$  spełniającej warunek (d) w definicji MRA nie jest łatwe. Zamiast tego znajdziemy  $\varphi$  generujące bazę Riesz. W ten sposób pokażemy, że spliny generują MRA Riesz. Niech

$$\Delta(x) = \varphi * \varphi(x),$$

gdzie  $\varphi$  jest funkcją skalującą MRA Haara (3.2). Wtedy

$$\Delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\varphi(x-y) dy = \int_0^1 \varphi(x-y) dy.$$

Jeżeli  $x \leq 0$  lub  $x \geq 2$  to  $\Delta(x) = 0$ , bo funkcja podcałkowa jest stale zerem w przedziale całkowania  $[0, 1]$ . Jeżeli  $x \in [0, 1]$  to

$$\Delta(x) = \int_0^x 1 dy = x.$$

Jeżeli  $x \in [1, 2]$  to

$$\Delta(x) = \int_{x-1}^1 1 dy = 1 - (x-1) = 2-x.$$

Ostatecznie więc

$$\Delta(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1] \\ 2-x & x \in [1, 2] \\ 0 & x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

Zauważmy, że  $\Delta$  jest splinem rzędu 1. Dla  $n \geq 2$  określamy indukcyjnie funkcje

$$(3.5) \quad \Delta^n(x) = \Delta^{n-1} * \varphi(x) = \int_0^1 \Delta^{n-1}(x-y) dy = \int_{x-1}^x \Delta^{n-1}(y) dy.$$

Na przykład

$$\Delta^2(x) = \Delta * \varphi(x) = \int_{x-1}^x \Delta(y) dy.$$

Jeżeli  $x \leq 0$  lub  $x \geq 3$  to, jak poprzednio funkcja podcałkowa jest stale 0 na przedziale całkowania, i  $\Delta^2(x) = 0$ . Jeżeli  $x \in [0, 1]$  to

$$\Delta^2 = \int_0^x \Delta(y) dy = \int_0^x y dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^x = \frac{x^2}{2}.$$

Podobnie rozważamy pozostałe przypadki. Otrzymujemy

$$\Delta^2(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & x \in [0, 1] \\ -x^2 + 3x - \frac{3}{2} & x \in [1, 2] \\ \frac{(x-3)^2}{2} & x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Zauważmy, że  $\Delta^2$  jest splinem rzędu 2. Rzeczywiście, na każdym przedziale postaci  $[k, k+1]$  jest wielomianem co najwyżej kwadratowym. Żeby sprawdzić różniczkowalność i ciągłość pochodnej wystarczy sprawdzić granice obustronne funkcji i jej pochodnej w punktach 0, 1, 2, 3. Pozostawiamy to jako ćwiczenie. Można udowodnić odpowiednie twierdzenie dla wszystkich rzędów

**Tw. 3.1.** Dla każdego  $n \geq 1$   $\Delta^n$  jest splinem rzędu  $n$ .

*Dowód.* Dowód jest indukcyjny. Wiemy, że twierdzenie jest prawdziwe dla  $n = 1$  i  $n = 2$ . Niech  $\Delta^n$  będzie splinem rzędu  $n$ . Z (3.5) i zasadniczego twierdzenia rachunku różniczkowego wynika, że

$$(\Delta^{n+1})'(x) = \Delta^n(x) - \Delta^n(x-1).$$

Skoro pochodna  $\Delta^{n+1}$  jest różniczkowalna w sposób ciągły  $n-1$  razy (założenie indukcyjne), to sama  $\Delta^{n+1}$  jest różniczkowalna w sposób ciągły  $n$  razy. Niech  $x \in [k, k+1]$

$$\Delta^{n+1}(x) = \int_{x-1}^k \Delta^n(y) dy + \int_k^x \Delta^n(y) dy.$$

W obu przedziałach całkowania funkcja podcałkowa jest wielomianem stopnia co najwyżej  $n$ . Każda z całek jest więc wielomianem stopnia co najwyżej  $n+1$ .  $\Delta^{n+1}$  jest więc splinem stopnia  $n+1$ .  $\square$

**Tw. 3.2.**  $\{\Delta^n(x-k; k \in \mathbf{Z})\}$  stanowi bazę Riesz przestrzeni  $V_0$ .  $(\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}, \Delta^n)$  jest analizą wielorodzinną Riesz.

To twierdzenie pozostawimy bez dowodu. Kłopotliwą częścią jest pokazanie, że układ splinów podstawowych jest bazą Riesz  $V_0$ . Żeby to zilustrować przeprowadzimy dowód w przypadku  $n = 1$ .

MRA Shannona Niech

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbf{R}); \hat{f}(\xi) = 0 \text{ poza przedziałem } [-2^j\pi, 2^j\pi]\}.$$

Oczywiście  $V_j \subset V_{j+1}$ . Skoro

$$f(2 \cdot)(\xi) = \frac{1}{2} \hat{f}\left(\frac{1}{2}\xi\right),$$

więc warunek (c) też jest łatwo spełniony: jeżeli  $\hat{f}(\xi)$  znika poza  $[-2^j\pi, 2^j\pi]$ , to  $1/2\hat{f}(\xi/2)$  znika poza  $[-2^{j+1}\pi, 2^{j+1}\pi]$  i na odwrót. Niech  $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$  będzie funkcją określoną przez swoją transformatę Fouriera

$$\hat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \xi \notin [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

Łatwo obliczyć, że

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x},$$

ale wygodniej będzie patrzeć się na  $\hat{\varphi}$ . Zauważmy, że przesunięcia (3.3) stanowią rodzinę o. n.: jeżeli  $n \neq 0$

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \varphi(\cdot - n) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \langle \hat{\varphi}, \varphi(\cdot - n) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi)} e^{in\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi(-in)} e^{-in\xi} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jeżeli  $n = 0$  to podobnie

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 d\xi = 1.$$

Chcemy teraz pokazać, że układ (3.3) stanowi bazę w  $V_0$ . Weźmy dowolne  $f \in V_0$ .  $\hat{f}$  jest całkowalna z kwadratem na  $\mathbf{R}$ , więc jest całkowalna z kwadratem na  $[-\pi, \pi]$ . Możemy więc rozwinąć  $\hat{f}$  na  $[-\pi, \pi]$  w szereg Fouriera

$$(3.6) \quad \hat{f}(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\xi} \quad \xi \in [-\pi, \pi].$$

Szereg jest zbieżny w  $L^2([-\pi, \pi])$ . Zauważmy, że

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\xi) \alpha_n e^{in\xi} \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

Obie strony są 0 dla  $\xi \notin [-\pi, \pi]$ , a w  $[-\pi, \pi]$  zgadza się na mocy (3.6). Szereg (3.7) jest zbieżny w  $L^2(\mathbf{R})$ , co wynika natychmiast ze zbieżności szeregu (3.6) w  $L^2([-\pi, \pi])$  i znikania obu stron poza  $[-\pi, \pi]$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}(\xi) - \sum_{n=-M}^N \hat{\varphi}(\xi) \alpha_n e^{in\xi} \right|^2 d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \hat{f}(\xi) - \sum_{n=-M}^N \alpha_n e^{in\xi} \right|^2 d\xi.$$

Możemy więc obliczyć odwrotną transformatę Fouriera obu stron (3.7) wyraz za wyrazem i otrzymamy

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \varphi(x - n) \quad \text{w } L^2(\mathbf{R}).$$

Ponieważ  $f$  było dowolnym elementem  $V_0$ , więc układ (3.3) stanowi bazę o. n.  $V_0$ . Zauważmy, że  $\hat{\varphi}$  jest ciągła w 0 i  $\hat{\varphi}(0) = 1$ , więc  $(\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}, \varphi)$  stanowi MRA. MRA Shannona stanowi w pewnym sensie odbicie analizy Haara, poprzez transformatę Fouriera. Jest prosta w obliczeniach, dla zastosowań ma wadę:  $\hat{\varphi}$  jest nieciągła.

MRA Lemarie-Meyera

**Konstrukcja falek.** Niech  $W_0$  będzie dopełnieniem ortogonalnym  $V_0$  w  $V_1$ :

$$W_0 = \{f \in V - 1; f \perp g \ \forall g \in V_0\}.$$

Ponieważ  $V_0$  jest domkniętą podprzestrzenią liniową  $V_1$ , więc  $V_1$  można zapisać jako sumę prostą

$$V_1 = V_0 \oplus W_0.$$

Naszym celem będzie znalezienie  $\psi \in W_0$  takiej, że układ

$$\{\psi(x - n); n \in \mathbf{Z}\}$$

stanowi bazę o. n.  $W_0$ . Pokażemy, że takie  $\psi$  jest faleką. Z analizą wielorozdzielczą  $(\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}, \varphi)$  związany jest tak zwany filtr dolnoprzepustowy. Z definicji MRA wynika, że funkcja

$$(1/2)\varphi(x/2)$$

jest elementem  $V_{-1}$ , a więc także  $V_0$ . Można ją więc zapisać w bazie jako

$$(3.8) \quad (1/2)\varphi(x/2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \varphi(x - n),$$

gdzie szereg jest zbieżny w  $L^2(\mathbf{R})$ , a współczynniki bazowe dane są przez

$$h_n = \left\langle \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{1}{2} \cdot\right), \varphi(\cdot - n) \right\rangle.$$

Ciąg współczynników  $\{h_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  nazywamy filtrem dolnoprzepustowym. Zastosujmy transformatę Fouriera do (3.8)

$$\hat{\varphi}(2\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \hat{\varphi}(\xi) e^{-in\xi}.$$

Szereg jest zbieżny w  $L^2(\mathbf{R})$ . Zauważmy, że ciąg  $\{h_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  jest sumowalny z kwadratem (jako ciąg współczynników bazowych), a więc szereg

$$(3.9) \quad m_0(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-in\xi}$$

jest zbieżny w  $L^2([-\pi, \pi])$  do funkcji  $m_0$   $2\pi$ -okresowej, którą również nazywamy filtrem dolnoprzepustowym. Z dwóch ostatnich równości otrzymujemy tak zwane równanie skalujące

$$(3.10) \quad \hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi).$$

Będziemy potrzebowali następującego twierdzenia

**Tw. 3.3.** (a) Dla dowolnej funkcji  $f \in L^2(\mathbf{R})$  układ

$$\{f(x-n); n \in \mathbf{Z}\}$$

jest ortonormalny wtedy i tylko wtedy gdy

$$(3.11) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1.$$

(b) Dla dowolnych funkcji  $f, g \in L^2(\mathbf{R})$  układy

$$\{f(x-n); n \in \mathbf{Z}\} \quad \text{ i } \quad \{g(x-n); n \in \mathbf{Z}\}$$

są wzajemnie ortogonalne (czyli każda funkcja z jednego układu jest ortogonalna do każdej funkcji z drugiego) wtedy i tylko wtedy gdy

$$(3.12) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi + 2k\pi) \overline{\hat{g}(\xi + 2k\pi)} = 0.$$

Równości (3.11) i (3.12) zachodzą prawie wszędzie, to znaczy zachodzą poza zbiorem miary Lebesgue'a 0. Oba szeregi są absolutnie zbieżne prawie wszędzie.

*Dowód.* Części (a) i (b) są bardzo podobne. Przeprowadzimy dowód (a).

$$\begin{aligned} \langle f(\cdot - n), f(\cdot - k) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}(\cdot - n), \hat{f}(\cdot - k) \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-in\xi} \overline{\hat{f}(\xi)} e^{ik\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 e^{-i(n-k)\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Całkę po  $\mathbf{R}$  rozpiszemy jako sumę całek po kolejnych przedziałach  $[2l\pi, 2(l+1)\pi)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{2l\pi}^{2(l+1)\pi} |\hat{f}(\xi)|^2 e^{-i(n-k)\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} |\hat{f}(\xi + 2l\pi)|^2 e^{-i(n-k)\xi} d\xi, \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej całce zamieniliśmy zmienne  $\xi \mapsto \xi + 2l\pi$ . Funkcja wykładnicza nie zmieniła się, bo jest okresowa. Zamienimy teraz kolejność sumowania i całkowania. W tym wypadku jest to możliwe na mocy twierdzenia o zbieżności zdominowanej.

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi + 2l\pi)|^2 \right) e^{-i(n-k)\xi} d\xi.$$

Zauważmy, że ostatnie wyrażenie jest współczynnikiem Fouriera rzędu  $n - k$   $2\pi$ -okresowej funkcji

$$(3.13) \quad \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi + 2l\pi)|^2.$$

Funkcja ta jest całkowalna na  $[-\pi, \pi]$ , ale niekoniecznie całkowalna z kwadratem. Ale funkcje całkowalne też można rozwijać w szeregi Fouriera i takie rozwinięcia są jednoznaczne. Pora wyciągnąć wnioski z naszych obliczeń. Układ  $\{f(x - n); n \in \mathbf{Z}\}$  jest ortonormalny czyli lewa strona naszego długiego ciągu równości jest 0 dla  $n \neq k$  i 1 dla  $n = k$  wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie współczynniki Fouriera funkcji (3.13) są zerami, z wyjątkiem współczynnika rzędu 0, który jest równy 1. To oznacza, korzystając z jednoznaczności rozwinięć, że funkcja (3.13) musi być stała równa 1.

Dowód części (b) wygląda podobnie, zaczynamy od

$$\langle f(\cdot - n), g(\cdot - k) \rangle$$

i otrzymujemy, że jest to  $(n - k)$ -ty współczynnik Fouriera funkcji całkowalnej

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi + 2l\pi) \overline{\hat{g}(\xi + 2l\pi)}.$$

Wszystkie współczynniki są zerami wtedy i tylko wtedy, gdy sama funkcja jest stale 0.  $\square$

Z powyższego twierdzenia najpierw otrzymamy pewną własność filtru dolnoprzepustowego. Niech  $\xi \in \mathbf{R}$ . Funkcja skalująca  $\varphi$  spełnia założenia (a) twierdzenia, więc

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k - \text{parzyste}}}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k - \text{nieparzyste}}}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2(2k)\pi)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2(2k+1)\pi)|^2. \end{aligned}$$

W powyższej sumie rozdzieliliśmy składniki parzyste i nieparzyste i zmieniliśmy indeksy sumowania. Zastosujmy teraz równanie skalujące (3.10)

$$\begin{aligned} |\hat{\varphi}(\xi + 2(2k)\pi)|^2 &= |m_0(\xi/2 + 2k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi/2 + 2k\pi)|^2 \\ |\hat{\varphi}(\xi + 2(2k+1)\pi)|^2 &= |m_0(\xi/2 + 2k\pi + \pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi/2 + 2k\pi + \pi)|^2. \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |m_0(\xi/2 + 2k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi/2 + 2k\pi)|^2 + \\ &\quad + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |m_0(\xi/2 + 2k\pi + \pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi/2 + 2k\pi + \pi)|^2 \\ &= |m_0(\xi/2)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi/2 + 2k\pi)|^2 + \\ &\quad + |m_0(\xi/2 + \pi)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi/2 + \pi + 2k\pi)|^2, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy  $2\pi$ -okresowość filtru  $m_0$ . Wykorzystamy teraz jeszcze równość (3.13) dla obu pozostałych sum i otrzymujemy

$$= |m_0(\xi/2)|^2 + |m_0(\xi/2 + \pi)|^2.$$

Ponieważ  $\xi$  było dowolne, więc otrzymujemy tak zwane równanie Barnwella-Smitha

$$(3.15) \quad |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1,$$

prawdziwe prawie wszędzie. Do znalezienia falki  $\psi$  będzie nam jeszcze potrzebne następujące proste twierdzenie.

**Tw. 3.4.**  $f \in V_0 \Leftrightarrow \hat{f}(\xi) = \lambda(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$  dla pewnej  $2\pi$ -okresowej funkcji  $\lambda \in L^2([-\pi, \pi])$ .

*Dowód.* Powtarzamy argument służący do dowodu równania skalującego.  $f \in V_0$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \varphi(x - n),$$

gdzie szereg jest zbieżny w  $L^2(\mathbf{R})$  i  $\alpha_n = \langle f, \varphi(\cdot - n) \rangle$ . Wynika to wprost z tego, że  $\{\varphi(x - n); n \in \mathbf{Z}\}$  jest bazą o. n.  $V_0$ . Stosując transformatę Fouriera do obu stron otrzymujemy

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{-in\xi} \hat{\varphi}(\xi).$$

Ciąg  $\{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  jako ciąg współczynników bazowych jest sumowalny z kwadratem, więc szereg

$$\lambda(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{-in\xi}$$

jest zbieżny w  $L^2([-\pi, \pi])$  do  $2\pi$ -okresowej funkcji  $\lambda \in L^2([-\pi])$ .  $\square$

Powróćmy do falki  $\psi$ . Przypomnijmy, że szukamy  $\psi \in V_1$ . A więc

$$(1/2)\psi(x/2) \in V_0.$$

Z twierdzenia 3.4

$$\hat{\psi}(2\xi) = \lambda(\xi)\hat{\varphi}(\xi).$$

Wystarczy więc znaleźć odpowiednią funkcję  $\lambda$ . Przypomnijmy, że szukamy  $\psi$  takiej, że

$$(3.16) \quad \{\psi(x - n); n \in \mathbf{Z}\}$$

jest bazą o. n. przestrzeni  $W_0$ , prostopadłej do  $V_0$ . Skorzystamy z części (a) i (b) twierdzenia 3.3. Korzystając z części (a) i postępując tak, jak przy dowodzie równości (3.15) otrzymujemy

$$(3.17) \quad |\lambda(\xi)|^2 + |\lambda(\xi + \pi)|^2 = 1.$$

Korzystając z części (b) twierdzenia 3.3 i postępując identycznie otrzymujemy

$$(3.18) \quad m_0(\xi \overline{\lambda(\xi)} + m_0(\xi + \pi) \overline{\lambda(\xi + \pi)}) = 0.$$

Przypomnijmy, że (3.17) oznacza, że układ (3.16) jest ortonormalny, a (3.18) oznacza, że układ (3.16) należy do  $W_0$  (dopełnienie ortogonalne  $V_0$ ). Zauważmy, że (3.17) i (3.18) są spełnione jeśli przyjąć

$$(3.19) \quad \lambda(\xi) = e^{-i\xi} \overline{m_0(\xi + \pi)}.$$

Funkcję tą będziemy nazywać filtrem górnoprzepustowym i oznaczać przez  $m_1$ . Sprawdźmy, dla przykładu, że (3.19) spełnia (3.18)

$$m_0(\xi)e^{i\xi}m_0(\xi + \pi) + m_0(\xi + \pi)e^{i(\xi + \pi)}m_0(\xi + 2\pi) = e^{i\xi}m_0(\xi)m_0(\xi + \pi) - e^{i\xi}m_0(\xi)m_0(\xi + \pi) = 0,$$

gdyż  $e^{i\pi} = -1$ . Nietrudno się przekonać, że układ (3.16) jest nie tylko układem ortonormalnym w  $W_0$ , ale jest bazą o. n.  $W_0$ . Gdyby nie był bazą, czyli jego kombinacje liniowe nie leżałyby gęsto w  $W_0$  to istniałby niezerowy element  $f \in W_0$ , spełniający  $f \perp \psi(\cdot - n)$  dla każdego  $n \in \mathbf{Z}$ . Skoro  $f \in W_0$ , to także  $f \perp \varphi(\cdot - n)$  dla każdego  $n \in \mathbf{Z}$ . Mamy

$$\hat{f}(2\xi) = \lambda(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \quad \hat{\psi}(2\xi) = m_1(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \quad \hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi).$$

Rozumując jak w dowodzie twierdzenia 3.3 a następnie jak w dowodzie równości (3.15) otrzymujemy

$$\begin{aligned} m_0(\xi)\overline{\lambda(\xi)} + m_0(\xi + \pi)\overline{\lambda(\xi + \pi)} &= 0, \\ m_1(\xi)\overline{\lambda(\xi)} + m_1(\xi + \pi)\overline{\lambda(\xi + \pi)} &= 0. \end{aligned}$$

Wstawiając wzór na  $m_1$  i korzystając z (3.15) powyższy układ można rozwiązać ze względu na wartości  $\lambda$ . Jedynym rozwiązaniem jest

$$\lambda(\xi) = \lambda(\xi + \pi) = 0.$$

Ponieważ  $\xi$  było dowolne otrzymujemy  $f = 0$ , co stanowi sprzeczność. Otrzymaliśmy więc bazę o. n.  $W_0$ , daną przez (3.16).

Falka  $\psi$  została skonstruowana przy pomocy konkretnego filtru  $m_1$ . Można pokazać, że dowolna  $\tilde{\psi}$  generująca bazę w  $W_0$  musi spełniać

$$\hat{\tilde{\psi}}(\xi) = \hat{\psi}(\xi)s(\xi),$$

gdzie  $s$  jest funkcją  $2\pi$ -okresową i unimodularną, to znaczy  $|s(\xi)| = 1$  dla każdego  $\xi$ . Przykładami takich funkcji są funkcje

$$s(x) = e^{inx}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Wynika stąd, na przykład, że w ramach danej MRA możemy wybierać falki o różnych „fazach”.

Rozwijając filtr górnoprzepustowy w szereg Fouriera, podobnie jak  $m_0$ ,

$$m_1(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-in\xi},$$

otrzymujemy ciąg współczynników  $\{g_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ , który również nazywamy filtrem górnoprzepustowym. Współczynniki  $g_n$  można wyliczyć przy pomocy współczynników filtru dolnoprzepustowego  $h_n$ :

$$\begin{aligned} m_1(\xi) &= e^{-i\xi} \overline{m_0(\xi + \pi)} = e^{-i\xi} \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-in(\xi + \pi)}} \\ &= e^{-i\xi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{h_n} e^{in(\xi + \pi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{h_n} e^{i(n-1)\xi} (-1)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{h_{n+1}} (-1)^{n+1} e^{in\xi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{1-n} \overline{h_{1-n}} e^{-in\xi}. \end{aligned}$$

Tak więc

$$g_n = (-1)^{1-n} \overline{h_{1-n}}.$$

(Wybierając falkę z inną fazę możemy uzyskać inny wzór.) Zauważmy jeszcze, że

$$g_n = \langle (1/2)\psi(\cdot/2), \varphi(\cdot - n) \rangle.$$

Podsumowując,  $m_0$  i  $m_1$  spełniają następujące 3 warunki

$$(3.20) \quad \begin{aligned} |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 &= 1, \\ |m_1(\xi)|^2 + |m_1(\xi + \pi)|^2 &= 1, \\ m_0(\xi) \overline{m_1(\xi)} + m_0(\xi + \pi) \overline{m_1(\xi + \pi)} &= 0. \end{aligned}$$

Dwa filtry (czyli  $2\pi$ -okresowe funkcje) spełniające powyższe 3 warunki nazywamy filtrem kwadraturowo sprzężonym lub kwadraturowo lustrzanym (w skrócie QMF). Filtry takie często się pojawiają w teorii przetwarzania sygnału.

Na koniec chcielibyśmy pokazać, że układ

$$(3.21) \quad \left\{ \psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), j, k \in \mathbf{Z} \right\}$$

jest bazą o. n. całej przestrzeni  $L^2(\mathbf{R})$ . Wprowadźmy przestrzenie  $W_j$ :

$$W_j = \{f; f(2^{-j}x) \in W_0\}.$$

Ponieważ jak zauważyliśmy wcześniej

$$V_j = \{f; f(2^{-j}x) \in V_0\},$$

więc  $W_j$  jest częścią  $V_{j+1}$  prostopadłą do  $V_j$

$$(3.22) \quad V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

Ponieważ przeskalowanie  $f \mapsto f(2^{-j}x)$  jest przekształceniem zachowującym ortogonalność, więc (3.22) jest po prostu przeskalowaną definicją przestrzeni  $W_0$

$$V_1 = V_0 \oplus W_0.$$

Zauważmy, że przestrzenie  $W_j$  są wzajemnie ortogonalne. Jeżeli  $k < j$  to  $W_k$  jest podprzestrzenią  $V_{k+1} \subset V_j$ , a  $V_j$  jest ortogonalna do  $W_j$ . Jeżeli  $k > j$  to stosujemy ten sam argument, zamieniając  $k$  z  $j$ . Tak więc

$$W_j \perp W_k \quad \forall k \neq j.$$

Funkcje

$$(3.23) \quad \{\psi_{j,k}; k \in \mathbf{Z}\}$$

stanowią bazę o. n. przestrzeni  $W_j$ , co wynika wprost z definicji  $W_j$  i  $\psi_{j,k}$ . Dla różnych  $j$  układy (3.23) są wzajemnie ortogonalne, więc układ (3.21) jest ortonormalny. Pozostaje uzasadnić, że jest bazą. Niech  $f \in V_J$  i niech

$$f \perp \psi_{j,k} \quad \forall j, k \in \mathbf{Z}, j < J.$$

Z tego, że

$$f \perp \psi_{J-1,k} \quad \forall k \in \mathbf{Z}$$

wynika, że  $f \perp W_{J-1}$ , a więc  $f \in V_{J-1}$ . Powtarzając ten argument otrzymujemy kolejno  $f \in V_{J-2}$ ,  $f \in V_{J-3}$ , .... Tak więc

$$f \in \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j$$

a więc  $f = 0$ . Czyli układ

$$\{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbf{Z}, j < J\}$$

jest bazą o. n.  $V_J$ . Niech teraz  $f \in L^2(\mathbf{R})$  i  $f \perp \psi_{j,k}$  dla wszystkich  $j, k \in \mathbf{Z}$ . Z powyższego wynika, że  $f \perp V_J$  dla wszystkich  $J \in \mathbf{Z}$ , a więc także

$$f \perp \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j.$$

Z tego wynika, że  $f = 0$ .

Pokazaliśmy, że z każdą MRA związany jest filtr dolnoprzepustowy  $m_0$ . Filtr  $m_0$  odgrywa kluczową rolę. Mając filtr można zrekonstruować całą MRA. Konstrukcja wielu falek w tym falek Daubechies opiera się na następującym twierdzeniu

**Tw. 3.5 (Mallat-Meyer).** *Jeżeli  $m_0$  jest  $2\pi$ -okresową funkcją spełniającą równanie Barnwella-Smitha (3.15),  $m_0(0) = 1$ ,  $m_0$  jest różniczkowalna w sposób ciągły i  $m_0(\xi) > 0$  dla  $\xi \in [-\pi/2, \pi/2]$  to istnieje MRA dla której  $m_0$  jest filtrem dolnoprzepustowym.*

*Dowód.* Będzie dowód.  $\square$

**Przykłady falek.** Falka Haara: MRA Haara ma filtr dolnoprzepustowy dany równaniem

$$\begin{aligned} m_0(\xi) &= \frac{\hat{\varphi}(2\xi)}{\hat{\varphi}(\xi)} = \frac{e^{-i\xi \frac{\sin \xi}{\xi}}}{e^{-i\xi/2 \frac{\sin \xi/2}{\xi/2}}} \\ &= e^{-i\xi/2} \frac{\sin \xi}{\sin \xi/2} \cdot \frac{\xi/2}{\xi} = e^{-i\xi/2} \cos \xi/2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-i\xi}. \end{aligned}$$

Mając  $h_0 = h_1 = 1/2$  i  $h_n = 0$  dla  $n \neq 0, 1$  obliczamy  $g_0 = (-1)\overline{h_1} = -1/2$ ,  $g_1 = \overline{h_0} = 1/2$  i  $g_n$  dla  $n \neq 0, 1$ . Następnie wykorzystujemy wzór

$$(1/2)\psi(x/2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \varphi(x-n) = -(1/2)\varphi(x) + (1/2)\varphi(x-1),$$

czyli

$$\psi(x) = \begin{cases} -1 & x \in [0, 1/2) \\ 1 & x \in [1/2, 1) \\ 0 & x \notin [0, 1) \end{cases}$$

Falka Shannona: W przypadku MRA Shannona mamy

$$\hat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \xi \notin [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

Jeżeli  $\xi \in [-\pi, \pi]$  to można rozwiązać równanie skalujące (3.10)

$$m_0(\xi) = \frac{\hat{\varphi}(2\xi)}{\hat{\varphi}(\xi)}.$$

Otrzymujemy, że dla  $\xi \in [-\pi, \pi]$

$$m_0(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 0 & \xi \notin [-\pi/2, \pi/2]. \end{cases}$$

Powyższe określa  $m_0$  całkowicie, ze względu na okresowość. Podstawiając do wzoru otrzymujemy

$$\hat{\psi}(2\xi) = e^{-i\xi} \overline{m_0(\xi + \pi)} \hat{\varphi}(\xi).$$

Łatwo sprawdzić, że oznacza to

$$\hat{\psi}(\xi) = \begin{cases} e^{-i\xi} & \xi \in [-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi] \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Falki Lemarie-Meyer:

Falki Daubechies: Falki Daubechies to najważniejsza, najczęściej używana w zastosowaniach numerycznych rodzina falek. Ich najważniejszą cechą jest to, że filtry dolno- i górnoprzepustowe mają skończoną długość. Falki Daubechies istnieją dla każdej, parzystej długości filtrów. Falka Haara jest najprostszym elementem tej rodziny, ma najkrótsze filtry, ale jest nieciągła. Wraz ze wzrostem długości filtrów zwiększa się gładkość falek. Konstrukcja falek opiera się na konstrukcji odpowiedniego filtru dolnoprzepustowego  $m_0$  spełniającego założenia twierdzenia 3.5. Będziemy więc szukali  $m_0$  - wielomianu trygonometrycznego (czyli funkcji o skończonym szeregu Fouriera) spełniającej

$$\begin{aligned} |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 &= 1, \\ m_0(0) &= 1, \\ m_0(\xi) &> 0 \quad \text{dla } \xi \in [-\pi/2, \pi/2]. \end{aligned}$$

Pozostałe założenia różniczkowalności w sposób ciągły jest spełnione automatycznie dla wielomianów trygonometrycznych - są one różniczkowalne nieskończenie wiele razy. Pierwszym krokiem jest skonstruowanie wielomianu trygonometrycznego  $g$  spełniającego

$$\begin{aligned} g(\xi) &\geq 0, \\ g(\xi) &> 0 \quad \xi \in [-\pi/2, \pi/2], \\ g(0) &= 1, \\ g(\xi) + g(\xi + \pi) &= 1. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Niech  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Niech

$$g_k(\xi) = 1 - \frac{1}{c_k} \int_0^\xi (\sin t)^{2k+1} dt,$$

gdzie stała  $c_k$  jest dana przez

$$c_k = \int_0^\pi (\sin t)^{2k+1} dt.$$

Zauważmy, że funkcja  $g_k$  spełnia wszystkie warunki (3.24). Różniczkując całkę

$$\frac{d}{d\xi} \left( \int_0^\xi (\sin t)^{2k+1} dt \right) = (\sin \xi)^{2k+1}$$

widzimy, że sama całka ma lokalne maksima w nieparzystych wielokrotnościach  $\pi$  i lokalne minima w parzystych wielokrotnościach  $\pi$ . Można to wywnioskować ze znaku  $\sin \xi$ . Potęga  $2k + 1$  jest nieparzysta

i zachowuje znak. Całka rośnie od 0 do  $\pi$ , gdzie przyjmuje wartość największą  $c_k$ , następnie maleje od  $\pi$  do  $2\pi$ , gdzie przyjmuje wartość najmniejszą 0. Wynika to z następującej obserwacji

$$\int_{\pi}^{2\pi} (\sin t)^{2k+1} dt = \int_0^{\pi} (\sin(t + \pi))^{2k+1} dt = - \int_0^{\pi} (\sin t)^{2k+1} dt,$$

a więc

$$\int_0^{2\pi} (\sin t)^{2k+1} dt = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} = 0.$$

Wynika stąd, że  $g_k$  oscyluje od swojej wartości największej 1 w punktach  $2k\pi$  do wartości najmniejszej 0 w punktach  $(2k+1)\pi$ , a pomiędzy takimi punktami jest ściśle dodatnia. W ten sposób pokazaliśmy pierwsze 3 własności w (3.24). Sprawdźmy ostatnią własność

$$\begin{aligned} g_k(\xi) + g_k(\xi + \pi) &= 1 - \frac{1}{c_k} \int_0^{\xi} (\sin t)^{2k+1} dt + 1 - \frac{1}{c_k} \int_0^{\xi+\pi} (\sin t)^{2k+1} dt \\ &= 2 - \frac{1}{c_k} \int_0^{\xi} (\sin t)^{2k+1} dt + \frac{1}{c_k} \int_{-\pi}^{\xi} (\sin t)^{2k+1} dt, \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej całce zamieniliśmy zmienne  $t \mapsto t + \pi$  i skorzystaliśmy z nieparzystości  $(\sin t)^{2k+1}$ . Mamy więc

$$= 2 + \frac{1}{c_k} \int_{-\pi}^0 (\sin t)^{2k+1} dt = 2 - \frac{1}{c_k} \int_0^{\pi} (\sin t)^{2k+1} dt = 1.$$

W końcu zauważmy, że  $g_k$  jest wielomianem trygonometrycznym.  $\sin t$  jest wielomianem

$$\sin t = \frac{1}{2i}e^{it} - \frac{1}{2i}e^{-it}.$$

Po podniesieniu do potęgi dalej jest wielomianem trygonometrycznym, podobnie po scałkowaniu. Filtr  $m_0$  uzyskujemy z następującego, bardzo starego twierdzenia, którego nie będziemy dowodzić.

**Tw. 3.6 (Riesz-Fejer).** *Jeżeli  $g(\xi)$  jest wielomianem trygonometrycznym i  $g(\xi) \geq 0$  w każdym punkcie  $\xi \in \mathbf{R}$ , to istnieje wielomian trygonometryczny  $m_0$  taki, że*

$$|m_0(\xi)|^2 = g(\xi). \quad \square$$

Falki splinowe: