

Wykład 2.

Transformata Fouriera

6.05.2007

Przypomnimy podstawowe zagadnienia związane z transformatą Fouriera. Transformata Fouriera przekształca wyjściową funkcję w ten sposób, że wartości transformaty nie informują o wartości samej funkcji w jakimkolwiek punkcie, ale informują jaka jest zawartość składowej o danej *częstotliwości* w funkcji wyjściowej. W związku z tym obliczanie transformaty Fouriera nazywa się czasem *analizą częstotliwościową*, *analizą harmoniczną* lub *analizą spektralną* funkcji. Transformata Fouriera stanowi przekształcenie funkcji które zachowuje całą informację. Funkcję wyjściową można odtworzyć z transformaty, przy pomocy transformaty odwrotnej. Transformata Fouriera stanowi więc, intuicyjnie, rozkład funkcji na składowe częstotliwościowe. Nie jest to ściśle stwierdzenie, bo na przykład w przypadku funkcji w $L^2(\mathbf{R})$ transformata jest funkcją zmiennej rzeczywistej, więc musimy rozważać wszystkie częstotliwości będące liczbami rzeczywistymi, a funkcja wyjściowa w ogóle nie jest okresowa.

Transformata Fouriera jest, matematycznie, pojęciem bardzo ogólnym, które występuje w wielu sytuacjach. Dla matematyka nie jest więc niczym dziwnym, że podobne pojęcie występuje w tak wielu formach w praktyce. Jest ciągła transformata Fouriera, jest rozwinięcie w szereg Fouriera, w końcu jest dyskretna transformata Fouriera. Z punktu widzenia zastosowań ogólne podejście do transformaty Fouriera nie jest interesujące, ale kilka faktów warto znać. Jeżeli G jest lokalnie zwartą grupą abelową to rozważamy homomorfizmy grupy G w grupę liczb zespolonych o module 1 (z mnożeniem):

$$f : G \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Każdy taki homomorfizm nazywa się charakterem. Charaktery można mnożyć punktowo, i z tak zdefiniowanym działaniem tworzą grupę abelową. Grupę charakterów nazywamy grupą dualną do G i oznaczamy $\hat{G}$. Można zdefiniować transformatę Fouriera, która jest wzajemnie jednoznaczny izometrycznym przekształceniem

$$\mathfrak{F} : L^2(G) \leftrightarrow L^2(\hat{G}), \quad f \mapsto \hat{f}, \quad \hat{f}(\xi) = \langle f, \xi \rangle,$$

(przypomnijmy, że charakter ξ jest funkcją na G). Nie będziemy zajmować się tą ogólną teorią, w szczególności nie będziemy wyjaśniać szczegółów powyższych wzorów czy całkowania na G . Wspomnijmy jeszcze, że grupą dualną do $\mathbf{R}$ jest też $\mathbf{R}$, a grupą dualną do $\mathbf{T}$ (liczby rzeczywiste z dodawaniem modulo 2π) jest $\mathbf{Z}$, i vice versa.

Transformata Fouriera w $L^2(\mathbf{R})$. Niech funkcja f będzie całkowalna na $\mathbf{R}$. Wtedy funkcja $f(x)e^{-ix\xi}$ też jest całkowalna, dla każdego $\xi \in \mathbf{R}$. Transformatą Fouriera funkcji f nazywamy funkcję

$$(1) \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx.$$

Korzystając z twierdzenia o zbieżności ograniczonej otrzymujemy natychmiast następujący fakt.

Fakt. Transformata Fouriera funkcji całkowalnej jest funkcją ciągłą i ograniczoną na $\mathbf{R}$.

Przykłady: a) Funkcja charakterystyczna przedziału $[-1/2, 1/2]$;

$$f(x) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x) = \begin{cases} 1 & : x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \\ 0 & : x \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]. \end{cases}$$

Niech $\xi \neq 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x) e^{-ix\xi} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-ix\xi} dx \\ &= \left. \frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \right|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{-i\xi} (e^{i\xi/2} - e^{-i\xi/2}) \\ &= \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}. \end{aligned}$$

Dla $\xi = 0$ rachunek jest jeszcze prostszy:

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x) dx = 1.$$

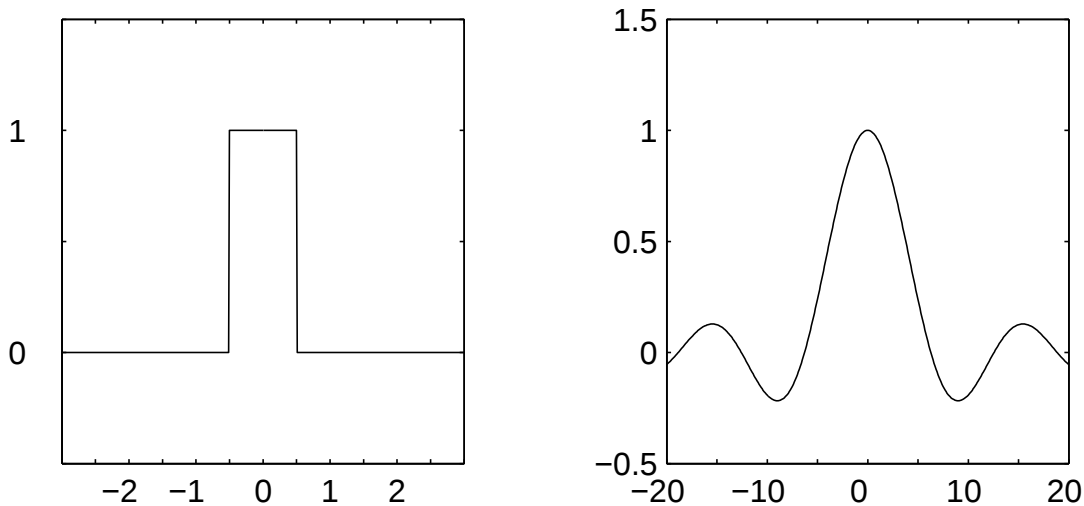


Fig. 1. Funkcja z przykładu a) i jej transformata Fouriera

b) Jądro Gaussa-Weierstrassa

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Wiadomo, że

$$\hat{w}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1.$$

To jest jedna z powszechnie znanych całek, którą można obliczyć na przykład używając współrzędnych biegunowych w całce podwójnej. $w(x)$ jest funkcją całkowalną na $\mathbf{R}$, i

$$\hat{w}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi} dx.$$

Transformatę tę obliczymy korzystając z następującego triku: niech $F(\xi) = \hat{w}(\xi)$. Wtedy różniczkując pod znakiem całki i całkując przez części otrzymujemy:

$$\begin{aligned} F'(\xi) &= \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d}{d\xi} (e^{-ix\xi}) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} (-ix) e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} (e^{-ix\xi}) dx \\ &= 0 - \frac{\xi}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi} dx \\ &= -\xi F(\xi). \end{aligned}$$

Transformata $F(\xi)$ spełnia więc proste równanie różniczkowe

$$F'(\xi) + \xi F(\xi) = 0.$$

Jest to proste równanie stopnia 1 ze zmiennymi rozdzielonymi, które można łatwo rozwiązać:

$$F(\xi) = c e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Podstawiając $\xi = 0$ w końcu otrzymujemy

$$\hat{w}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Jądro Gaussa-Weierstrassa jest więc niezmiennikiem transformaty Fouriera. Jest to jedna z przyczyn, dla których ta funkcja pojawia się w wielu sytuacjach. Dla osób, które nie lubią rozwiązywać równań różniczkowych, a które lubią całkowanie po krzywych na płaszczyźnie na koniec tego rozdziału obliczymy tą transformatę w inny sposób.

Definicja. Splotem funkcji f i g określonych na $\mathbf{R}$ nazywamy funkcję

$$(2) \quad f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy,$$

o ile całka (2) istnieje dla każdego $x \in \mathbf{R}$.

Splot jest przemienny ($f * g = g * f$). Jeżeli f i g są całkowalne to splot istnieje i też jest całkowalny:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f * g(x)| \, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) \, dy \right| \, dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)| |g(y)| \, dy \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)| \, dx \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| \, dy \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx. \end{aligned}$$

Sploty i filtry. Pojęcie splotu będzie dla nas narzędziem w dowodach. Warto jednak wspomnieć, że splot jest jednym z podstawowych pojęć w praktyce przetwarzania sygnału. Zauważmy, że zgodnie z powyższą obserwacją, jeżeli funkcja φ jest całkowalna, to splot z φ jest przekształceniem w przestrzeni funkcji całkowalnych:

$$T_{\varphi}(f)(x) = (f * \varphi)(x).$$

Przekształcenie T_{φ} jest liniowe (wynika to z liniowości całki), oraz przemienne z przesunięciami. Oznaczmy przez τ_{x_0} przesunięcie sygnału o x_0

$$(\tau_{x_0} f)(x) = f(x - x_0).$$

Wtedy

$$\begin{aligned} T_{\varphi}(\tau_{x_0} f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\tau_{x_0} f)(x-y) \varphi(y) \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y-x_0) \varphi(y) \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f((x-x_0)-y) \varphi(y) \, dy \\ &= (T_{\varphi}(f))(x-x_0) \\ &= \tau_{x_0}(T_{\varphi}(f))(x). \end{aligned}$$

Innymi słowy

$$T_{\varphi} \cdot \tau_{x_0} = \tau_{x_0} \cdot T_{\varphi}.$$

Splot funkcji całkowalnej g z funkcją $f \in L^2(\mathbf{R})$ jest funkcją z $L^2(\mathbf{R})$, i mamy nierówność

$$\|f * g\| \leq \|f\| \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| \, dx.$$

To jest prosty fakt wynikający z własności całki (splot nie musi istnieć w każdym punkcie, tak jak jest w przypadku splotu dwóch funkcji całkowalnych, ale istnieje w wystarczająco wielu punktach — w prawie wszystkich punktach — aby określić funkcję w $L^2(\mathbf{R})$). Z tego

faktu będziemy korzystać w dowodzie twierdzenia Plancherela. Warto zwrócić uwagę, że powyższa nierówność jest zupełnie naturalna, i można o niej myśleć jako o nierówności trójkąta. Intuicyjnie, możemy przybliżyć spłot sumą Riemanna

$$f * g(x) \approx \sum_{k=-M}^M f\left(x - \frac{k}{N}\right) g\left(\frac{k}{N}\right) \frac{1}{N}.$$

Stosując do lewej strony normę $L^2(\mathbf{R})$ i wykorzystując nierówność trójkąta, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|f * g\| &\approx \left\| \sum_{k=-M}^M f\left(\cdot - \frac{k}{N}\right) g\left(\frac{k}{N}\right) \frac{1}{N} \right\| \\ &\leq \sum_{k=-M}^M \left\| f\left(\cdot - \frac{k}{N}\right) \right\| \left| g\left(\frac{k}{N}\right) \right| \frac{1}{N} \\ &= \|f\| \sum_{k=-M}^M \left| g\left(\frac{k}{N}\right) \right| \frac{1}{N} \\ &\approx \|f\| \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx. \end{aligned}$$

Kropka zastępuje zmienną całkowania występującą w normie $L^2(\mathbf{R})$ (której nie piszemy). Skorzystaliśmy z faktu, że norma $L^2(\mathbf{R})$ jest niezmiennicza na przesunięcia

$$\|f(\cdot - t)\| = \|f\|.$$

Przekształcenie sygnału, które jest liniowe, przemienne z przesunięciami, i spełnia jeszcze pewne, niewielkie założenie ciągłości w zastosowaniach nazywa się filtrem. Filtry to właśnie spłoty z funkcjami. Widzieliśmy, że spłot z funkcją jest przekształceniem liniowym i przemennym z przesunięciami. Założenie ciągłości też jest spełnione, chociaż nie będziemy się zajmować szczegółami. Spłoty są więc filtrami. Na odwrót też: okazuje się, że każdy filtr jest spłotem. Łatwo się o tym przekonać intuicyjnie. Niech H będzie przekształceniem liniowym, przemennym z przesunięciami. Sygnał f przybliżymy funkcją schodkową:

$$f(x) \approx \sum_{k=-M}^M f\left(\frac{k}{N}\right) \chi_{[k/N, (k+1)/N)}(x),$$

gdzie $\chi_{[a,b)}$ jest funkcją charakterystyczną

$$\chi_{[a,b)}(x) = \begin{cases} 1 & : x \in [a, b) \\ 0 & : x \notin [a, b). \end{cases}$$

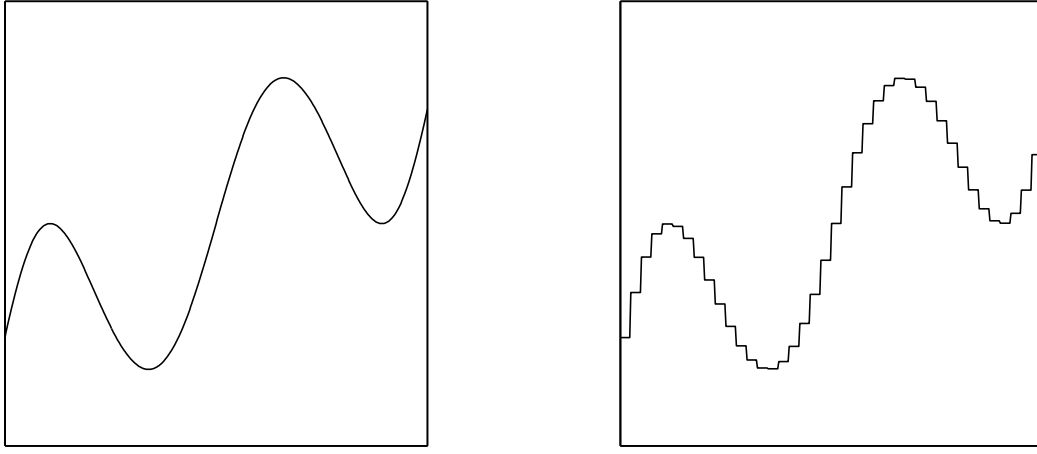


Fig. 2. Sygnał i jego przybliżenie funkcją schodkową

Wtedy

$$\begin{aligned}
 (Hf)(x) &\approx H \left(\sum_{k=-M}^M f \left(\frac{k}{N} \right) \chi_{[k/N, (k+1)/N)} \right) (x) \\
 &= \sum_{k=-M}^M f \left(\frac{k}{N} \right) H(\chi_{[k/N, (k+1)/N)})(x) \\
 &= \sum_{k=-M}^M f \left(\frac{k}{N} \right) H(\chi_{[0, 1/N)} \left(x - \frac{k}{N} \right) \\
 &= \sum_{k=-M}^M f \left(\frac{k}{N} \right) H(N\chi_{[0, 1/N)} \left(x - \frac{k}{N} \right) \frac{1}{N} \\
 &\approx \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy \\
 &= f * g(x),
 \end{aligned}$$

gdzie

$$g(x) \approx H(N\chi_{[0, 1/N)})(x).$$

Warunek ciągłości nałożony na filtr H powinien umożliwić przejście graniczne w naszym przybliżeniu, czyli powinien umożliwić zastąpienie $\approx$ przez równość. Widzimy więc, że filtr H splata sygnał z pewną funkcją g , która, w przybliżeniu jest odpowiedzią filtru H na sygnał $N\chi_{[0, 1/N)}$ dla dużych N . Z powyższych rozważań można wyciągnąć następujące dwa wnioski:

- (i) Działanie filtru sprowadza się do splotu z pewną funkcją g
- (ii) Funkcja g jest odpowiedzią filtru na „impuls jednostkowy”, czyli funkcję dodatnią, niezerową tylko w małym otoczeniu zera, której całka jest 1.

Uwaga: Mówiąc o g używamy słowa „funkcja”. Od razu jednak widać, że g może być czymś ogólniejszym od funkcji. Jeżeli H jest filtrem identycznościowym (czyli takim, który nic nie robi, $Hf = f$) to g nie może być funkcją. g , jako odpowiedź filtru na impuls jednostkowy sama jest takim „impulsem jednostkowym”. Inżynierowie g nazywają funkcją uogólnioną, a matematycy dystrybucją. Impuls jednostkowy jest właśnie przykładem funkcji uogólnionej. Osoby, które chciałyby lepiej zrozumieć opisywane tutaj luźno zagadnienia powinny zapisać się na jeden z naszych wykładów z zaawansowanej analizy lub analizy funkcjonalnej, natomiast na tym wykładzie poprzestaniemy na takich, intuicyjnych, uwagach.

Naszym celem teraz jest udowodnienie twierdzenia Plancherela, do którego będziemy potrzebowali kilka faktów.

Fakt. *Jeżeli f i g są całkowalne, to*

$$(3) \quad \widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).$$

dowód. Podstawiamy do wzorów, i korzystamy z własności funkcji wykładniczej

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f * g(x) e^{-i x \xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) g(y) e^{-i x \xi} dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-i y \xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) e^{-i (x - y) \xi} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-i y \xi} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i x \xi} dx \\ &= \hat{g}(\xi) \hat{f}(\xi). \quad \square \end{aligned}$$

Wróćmy na moment do naszych rozważań o filtrach. Mówiliśmy, że filtry to sploty z funkcjami lub funkcjami uogólnionymi. Powyższy Fakt przenosi się na przypadek splotu z funkcją uogólnioną. Działanie filtru na sygnale, po stronie transformaty Fouriera, sprowadza się więc do mnożenia przez tak zwaną „charakterystykę” filtru. Charakterystyka filtru to transformata Fouriera jego odpowiedzi impulsowej. Bardzo często opisując filtr inżynierowie podają jego charakterystykę. Mamy też następujący prosty wzór

Fakt. *Jeżeli f jest całkowalna i*

$$(4) \quad f_t(x) = \frac{1}{t} f\left(\frac{x}{t}\right), \quad t > 0,$$

to

$$\hat{f}_t(\xi) = \hat{f}(t\xi).$$

dowód. Korzystamy ze wzoru na całkowanie przez podstawienie

$$\begin{aligned} \hat{f}_t(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} f\left(\frac{x}{t}\right) e^{-i x \xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i t x \xi} dx \\ &= \hat{f}(t\xi). \quad \square \end{aligned}$$

Korzystając z powyższych dwóch faktów udowodnimy twierdzenie o istnieniu transformaty odwrotnej. Jeżeli funkcja f jest całkowalna, i jej transformata Fouriera $\hat{f}$, dana wzorem (1), też jest całkowalna, to funkcję f można odtworzyć z $\hat{f}$ przy pomocy wzoru

$$(5) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i x \xi} d\xi.$$

Ten wzór daje nam wskazówkę, co do natury Transformaty Fouriera. Funkcja f jest rozłożona na sumę (w przybliżeniu) oscylacji $x \mapsto e^{i x \xi}$, z amplitudami $|\hat{f}(\xi)|$.

Twierdzenie. *Jeżeli f i $\hat{f}$ są całkowalne ($\hat{f}$ dana wzorem (1)), to zachodzi wzór (5). Innymi słowy przekształcenie całkowe*

$$(6) \quad \check{F}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{i x \xi} d\xi$$

jest przekształceniem odwrotnym do transformaty Fouriera.

dowód. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$w_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} w\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \quad \text{a więc, z (4),} \quad \widehat{w_t}(\xi) = e^{-\frac{t\xi^2}{2}},$$

oraz

$$f_t(x) = f * w_t(x), \quad \text{a więc, z (3),} \quad \widehat{f_t}(\xi) = \hat{f}(\xi) \widehat{w_t}(\xi).$$

Następnie obliczamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f_t}(\xi) e^{i \xi y} d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \widehat{w_t}(\xi) e^{i \xi y} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i x \xi} dx e^{-\frac{t\xi^2}{2}} e^{i \xi y} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{t\xi^2}{2}} e^{-i \xi(x-y)} d\xi dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t\xi^2}{2}} e^{-i \xi(x-y)} d\xi dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \widehat{w_{1/t}}(x-y) dx. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \widehat{w_{1/t}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{z^2}{2t}} = w_t(z),$$

a więc, korzystając również z tego, że $w_t(z) = w_t(-z)$, kontynuując, otrzymujemy

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) w_t(x-y) dx \\ &= f * w_t(y) \\ &= f_t(y). \end{aligned}$$

Innymi słowy pokazaliśmy, że wzór (5) zachodzi dla f_t :

$$(7) \quad f_t(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_t(\xi) e^{i y \xi} d\xi.$$

Chcielibyśmy teraz przejść w powyższym wzorze do granicy gdy $t \rightarrow 0$. To jest proste rozumowanie, korzystające z własności całki. Wiemy, że

$$\hat{f}_t(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{w}_t(\xi) \rightarrow \hat{f}(\xi), \text{ gdy } t \rightarrow 0, \quad \text{ i } \quad |\hat{f}_t(\xi) e^{i y \xi}| \leq |\hat{f}(\xi)|,$$

przy czym ta ostatnia funkcja jest całkowalna. Korzystając z twierdzenia o zbieżności ograniczonej otrzymujemy

$$(8) \quad f_t(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_t(\xi) e^{i y \xi} d\xi \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i y \xi} d\xi,$$

gdy $t \rightarrow 0$, dla każdego $y \in \mathbf{R}$. Z drugiej strony, korzystając z faktu, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_t(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1, \quad \text{ i } \quad w(x) > 0,$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y) - f_t(y)| dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f(y) - f(y-x)) w_t(x) dx \right| dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f(y) - f(y-\sqrt{t}x)) w(x) dx \right| dy \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y) - f(y-\sqrt{t}x)| w(x) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y) - f(y-\sqrt{t}x)| dy w(x) dx. \end{aligned}$$

Z własności całki wynika, że przesunięcia są ciągłe względem całki, czyli

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y) - f(y-\sqrt{t}x)| dy = 0.$$

Korzystając ponownie z twierdzenia o zbieżności ograniczonej otrzymujemy, że $f_t \rightarrow f$ w sensie całki:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f_t(y) - f(y)| dy = 0.$$

Tak więc f_t jest zbieżna do f w sensie całki, i zbieżna w każdym punkcie $y \in \mathbf{R}$ do

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i y \xi} d\xi.$$

Z własności całki wynika, że obie te granice muszą być równe:

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i y \xi} d\xi.$$

□

Wnioskiem z powyższego jest najważniejsze twierdzenie, tak zwane twierdzenie Plancherela.

Twierdzenie Plancherela. (a) Niech $f \in L^2(\mathbf{R})$ będzie całkowalna. Wtedy $\hat{f}$ też należy do $L^2(\mathbf{R})$, oraz

$$(9) \quad \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|^2,$$

(b) Podzbiór $L^2(\mathbf{R})$ składający się z funkcji całkowalnych stanowi gęstą podprzestrzeń $L^2(\mathbf{R})$. Transformata Fouriera rozszerza się z tej podprzestrzeni na całe $L^2(\mathbf{R})$. W przypadku gdy $f \in L^2(\mathbf{R})$ nie jest całkowalna transformatę można obliczyć ze wzoru

$$(10) \quad \hat{f}(\xi) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f(x) e^{-i x \xi} dx.$$

Tak określone przekształcenie jest wzajemnie jednoznaczne (1-1 i „na”), izometrycznym (z dokładnością do czynnika $\sqrt{2\pi}$, jak we wzorze (9)) przekształceniem $L^2(\mathbf{R})$ na siebie. Przekształcenie odwrotne, w przypadku gdy f nie jest całkowalna, dane jest wzorem

$$(11) \quad \check{f}(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M f(\xi) e^{i x \xi} d\xi.$$

dowód. (a) Załóżmy najpierw dodatkowo, że $\hat{f}$ też jest całkowalna. Wtedy f i $\hat{f}$ są ograniczone (transformata Fouriera funkcji całkowalnej jest ograniczona). Jak łatwo policzyć

$$\begin{aligned} \widehat{\hat{f}}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(x)} e^{-i x \xi} dx \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i x \xi} dx} \\ &= \hat{f}(-\xi), \end{aligned}$$

gdyż $\overline{e^{-i x \xi}} = e^{i x \xi}$. Podstawiamy to do wzoru, i obliczamy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\hat{f}(x)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\hat{f}}(\xi) e^{i \xi x} d\xi dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(-\xi)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i \xi x} dx d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(-\xi)} \hat{f}(-\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{f}(\xi)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Pozbędziemy się teraz dodatkowego założenia, że $\hat{f}$ jest całkowalna. Niech więc teraz f będzie w $L^2(\mathbf{R}^n)$ i całkowalna. Podobnie jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia, i z tamtymi oznaczeniami, funkcja

$$f_t = f * w_t$$

(splot z przeskalowanym jądrem Gaussa-Weierstrassa) jest całkowalna, w $L^2(\mathbf{R})$ i ma całkowalną transformatę Fouriera ($|\hat{f}_t(\xi)| \leq c\hat{w}_t(\xi)$). Fakt, że f_t jest w $L^2(\mathbf{R})$ wynika z własności całki: splot funkcji całkowalnej z całkowalną z kwadratem jest całkowalny z kwadratem. Jest to przypadek szczególny tak zwanej nierówności Minkowskiego. Dla f_t możemy więc skorzystać z przeprowadzonego już dowodu

$$(12) \quad \|f_t\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}_t\|^2.$$

Korzystając z własności całki, podobnie jak w poprzednim dowodzie możemy pokazać, że $f_t \rightarrow f$ w $L^2(\mathbf{R})$ gdy $t \rightarrow 0$, a więc $\|f_t\| \rightarrow \|f\|$ (norma jest funkcją ciągłą). Wynika to z ciągłości przesunięć w $L^2(\mathbf{R})$, (w poprzednim twierdzeniu korzystaliśmy z ciągłości przesunięć w przestrzeni funkcji całkowalnych). Z drugiej strony $\|\hat{f}_t\| \rightarrow \|\hat{f}\|$ korzystając z twierdzenia o zbieżności monotonicznej ($|\hat{f}_t(\xi)| \uparrow |\hat{f}(\xi)|$). Przechodząc do granicy w (12) gdy $t \rightarrow 0$ otrzymujemy (9).

(b) Jeżeli $f \in L^2(\mathbf{R})$, to funkcje obcięte

$$(13) \quad f_n(x) = \begin{cases} f(x) & : |x| \leq n \\ 0 & : |x| > n \end{cases}$$

tworzą ciąg funkcji całkowalnych, zbieżny do f w $L^2(\mathbf{R})$:

$$\|f - f_n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_n(x)|^2 dx = \int_{|x| > n} |f(x)|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Każda funkcja $f \in L^2(\mathbf{R})$ jest więc granicą, w normie $L^2(\mathbf{R})$, ciągu funkcji całkowalnych. Transformatę Fouriera określamy więc następująco. Niech $f \in L^2(\mathbf{R})$ oraz $\{f_n\} \subset L^2(\mathbf{R})$ będzie ciągiem funkcji całkowalnych, zbieżnym do f :

$$f_n \rightarrow f \quad \text{w} \quad L^2(\mathbf{R}).$$

Ciąg $\{f_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego, a więc, zgodnie z (9), ciąg $\{\hat{f}_n\}$ też jest Cauchy'ego w $L^2(\mathbf{R})$, a więc jest zbieżny do jakiegoś elementu $F \in L^2(\mathbf{R})$. Ta granica jest, z definicji, transformatą Fouriera f . Zauważmy, że ta definicja nie zależy od wyboru ciągu $\{f_n\}$ funkcji całkowalnych, zbieżnego do f . Jeżeli dwa różne ciągi są zbieżne do f , to ich różnice tworzą ciąg zbieżny do zera:

$$f_n \rightarrow f, \quad g_n \rightarrow f \quad \text{w} \quad L^2(\mathbf{R}) \quad \Rightarrow \quad f_n - g_n \rightarrow 0 \quad \text{w} \quad L^2(\mathbf{R}).$$

Zgodnie z (9) transformaty Fouriera różnic zbiegają do 0, a więc transformaty Fouriera tych dwóch ciągów mają tę samą granicę. Zauważmy, że oznacza to też, że gdy wyjściowa funkcja f jest całkowalna, to nowa definicja pokrywa się ze starą — jako ciąg funkcji całkowalnych zbieżny do f można wziąć ciąg stały stale równy f . W końcu zauważmy, że skoro ciąg funkcji obciętych (13) składa się z funkcji całkowalnych i jest zbieżny do f , to (10) wynika z

podanej powyżej definicji, zastosowanej do tego konkretnego ciągu. Korzystając z ciągłości normy otrzymujemy (9) dla dowolnej funkcji $f \in L^2(\mathbf{R})$. W końcu pozostał do udowodnienia fakt, że transformata Fouriera jest „na” $L^2(\mathbf{R})$, oraz wzór (11). Niech f będzie dowolnym elementem $L^2(\mathbf{R})$. Niech f_n zbiega do f w $L^2(\mathbf{R})$, i składa się z funkcji całkowalnych, o całkowalnych transformatach Fouriera. Taki ciąg zawsze istnieje. Można pokazać, że funkcje na przykład różniczkowalne dwukrotnie, równe 0 poza pewnym skończonym przedziałem tworzą podzbiór gęsty $L^2(\mathbf{R})$, oraz mają wymagane własności: są całkowalne, oraz ich transformaty Fouriera są całkowalne. Z definicji $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$, oraz $\hat{f}_n$ są całkowalne, a więc $\hat{\hat{f}}_n \rightarrow \hat{\hat{f}}$. Wiemy z poprzedniego twierdzenia, że $\hat{\hat{f}}_n(x) = 2\pi f_n(-x) \rightarrow 2\pi f(-x)$. A więc $f = \hat{F}$, gdzie

$$F = \frac{1}{4\pi^2} \hat{\hat{f}}.$$

Z tych rachunków wynika (11) oraz to, że transformata Fouriera jest „na”. $\square$

Własności transformaty w $L^2(\mathbf{R})$. Przy założeniu, że wszystkie występujące funkcje są w $L^2(\mathbf{R})$ mamy

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x-c) &\longrightarrow &\hat{g}(\xi) = e^{-ic\xi} \hat{f}(\xi), \\ g(x) &= e^{i\omega x} f(x) &\longrightarrow &\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - \omega), \\ g(x) &= f(x/s) &\longrightarrow &\hat{g}(\xi) = s \hat{f}(s\xi), \quad s > 0, \\ g(x) &= f'(x) &\longrightarrow &\hat{g}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi), \\ g(x) &= -ix f(x) &\longrightarrow &\hat{g}(\xi) = \hat{f}'(\xi). \end{aligned}$$

Dowody zostawiamy jako ćwiczenie. Pokażemy natomiast zastosowanie transformaty Fouriera do rozwiązania tak zwanego równania ciepła, lub równania dyfuzji.

Równanie ciepła. Wyobraźmy sobie pręt metalowy leżący na płaszczyźnie wzdłuż osi OX . Niech pręt będzie nieskończenie długi, o pomijalnie małej średnicy, oraz niech będzie zrobiony z materiału przewodzącego ciepło, na przykład jakiegoś metalu. Niech temperatura pręta w punkcie x w czasie t będzie oznaczona przez $u(x, t)$. Można pokazać, że funkcja u spełnia następujące równanie ciepła

$$(14) \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

Równanie to wynika z praw fizyki, i czasem nazywa się równaniem dyfuzji. Niech rozkład temperatury na pręcie będzie znany w czasie $t = 0$, czyli niech u spełnia *warunek brzegowy*

$$u(x, 0) = f(x),$$

dla zadanej funkcji f . Możemy założyć, że f spełnia jakieś warunki regularności. Nam wystarczy $f \in L^2(\mathbf{R})$. Klasyczny problem sprowadza się do znalezienia funkcji $u(x, t)$, spełniającej równanie ciepła, i zadany warunek brzegowy. Będziemy szukali funkcji u takiej, że dla każdego $t \geq 0$ $u(\cdot, t) \in L^2(\mathbf{R})$, oraz $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \in L^2(\mathbf{R})$. Okazuje się, że rozwiązanie można znaleźć używając transformaty Fouriera. Teoria transformaty Fouriera powstała właśnie przy okazji

badania zagadnienia ciepła. Dla ustalonego $t \geq 0$ zastosujemy transformatę Fouriera, względem zmiennej x , do obu stron równania (14). Tak powstałą transformatę oznaczmy przez $F(\xi, t)$. Różniczkując względem t pod znakiem całki z (14) otrzymujemy

$$(15) \quad \frac{\partial F(\xi, t)}{\partial t} = -\kappa^2 \xi^2 F(\xi, t).$$

Ustalmy teraz ξ i spójmy na (15) jako na równanie różniczkowe funkcji zmiennej t . Równanie to łatwo rozwiązać, rozwiązanie ma postać

$$F(\xi, t) = c e^{-\kappa^2 \xi^2 t},$$

dla dowolnej stałej c . Podstawiając warunek początkowy (brzegowy), otrzymujemy

$$c = F(\xi, 0) = \hat{f}(\xi),$$

a więc

$$F(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-\kappa^2 \xi^2 t}, \quad \text{czyli} \quad u(x, t) = f * w_{\kappa^2 t}(x),$$

gdzie w_t jest znanym nam już jądrem Gaussa-Weierstrassa (zwanym także jądrem ciepła), przeskalowanym zgodnie z (4). Mamy więc ilustrację, jak własności transformaty Fouriera pozwalają zastosować ją do rozwiązywania równań różniczkowych. Dla inżynierów to jest główne zastosowanie transformaty Fouriera, i stanowi ona jedno z najważniejszych narzędzi inżynierskich. Poniżej udowodnimy tak zwaną zasadę nieoznaczoności Heisenberga. Zasada ta pokazuje pewien problem występujący w zastosowaniach transformaty Fouriera. Mówiąc bardzo ogólnie to jest właśnie problem, którego chcemy uniknąć zamieniając transformatę Fouriera na transformatę falkową. Zasada nieoznaczoności Heisenberga mówi, że jeżeli rozrzut wartości funkcji wokół jej wartości średniej jest mały (funkcja jest skupiona wokół jakiegoś punktu, i szybko maleje w miarę oddalania się od niego), to rozrzut wartości transformaty musi być duży (transformata Fouriera takiej funkcji nie może być skupiona wokół pewnej częstotliwości). Intuicyjnie to jest łatwe do uzasadnienia. W rzeczywistości jest to ściśle twierdzenie.

Zasada nieoznaczoności Heisenberga. Niech $f \in L^2(\mathbf{R})$ będzie unormowana, czyli $\|f\| = 1$, oraz taka, że $xf(x) \in L^2(\mathbf{R})$ oraz $\xi \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbf{R})$. Wtedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{\pi}{2}.$$

dowód. Wykorzystamy następujący wzór na całkowanie przez części. Jeżeli $h'g$, hg' oraz hg są całkowne na $\mathbf{R}$, to

$$\int_{-\infty}^{\infty} h'(x) g(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} h(x) g'(x) dx.$$

Zauważmy, że skoro $x^2|f(x)|^2$ oraz $|f(x)|^2$ są całkowalne, więc $x|f(x)|^2$ też jest całkowalna. Możemy więc skorzystać z powyższego wzoru na całkowanie przez części:

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} |f(x)|^2 dx \\
&= \left| - \int_{-\infty}^{\infty} \left(x f'(x) \overline{f(x)} + x f(x) \overline{f'(x)} \right) dx \right| \\
&\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x| |f(x)| |f'(x)| dx \\
&\leq 2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Przy okazji zauważmy, że równość w powyższym oszacowaniu może zachodzić tylko wtedy, gdy zachodzi równość w wykorzystanej nierówności Schwarz'a, czyli funkcje $x f(x)$ oraz $f'(x)$ muszą być współliniowe: musi istnieć stała zespolona c taka, że

$$x f(x) = c f'(x).$$

Rozwiązując to równanie różniczkowe otrzymujemy, że f musi być wielokrotnością jądra Gaussa-Weierstrassa. $\square$

Transformata Fouriera w $L^2(\mathbf{R}^n)$. Teoria w $L^2(\mathbf{R}^n)$ jest analogiczna do teorii 1-wymiarowej. Jeżeli f lub F są całkowalne, to

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{-i x \cdot \xi} dx, \\
\check{F}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} F(\xi) e^{i \xi \cdot x} d\xi,
\end{aligned}$$

gdzie $x \cdot \xi$ oznacza zwykły iloczyn skalarny w $\mathbf{R}^n$. Transformata jest wzajemnie jednoznacznym przekształceniem $L^2(\mathbf{R}^n)$ na siebie, a równość Plancherela ma postać

$$\|f\|^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \|\hat{f}\|^2.$$

Wszystkie dowody są takie same, jak w przypadku $L^2(\mathbf{R})$.

Transformata Fouriera w $L^2(\mathbf{T})$ (szeregi Fouriera). Niech f będzie funkcją na $\mathbf{R}$, okresową o okresie 2π , całkowalną na $[-\pi, \pi]$. Współczynnikami Fouriera f nazywamy ciąg

$$(16) \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i n x} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Przyporządkowanie funkcji f ciągu współczynników $\{\hat{f}(n)\}$ jest też czasem nazywane transformatą Fouriera. W przypadku funkcji okresowych, w odróżnieniu od sytuacji w $L^2(\mathbf{R})$ każda funkcja w $L^2(\mathbf{T})$ jest całkowalna w okresie, co wynika z nierówności Schwarz'a. Dla każdej funkcji w $L^2(\mathbf{T})$ można więc policzyć współczynniki Fouriera ze wzory (16). Zauważmy, że funkcje

$$(17) \quad \{e^{-i n x}; n \in \mathbf{Z}\}$$

tworzą bazę ortonormalną w $L^2(\mathbf{T})$, więc ciąg współczynników Fouriera stanowi ciąg współczynników bazowych. Twierdzenie Plancherela w przypadku funkcji okresowych jest więc prostsze niż w przypadku $L^2(\mathbf{R})$.

Twierdzenie Plancherela. *Transformata Fouriera jest wzajemnie jednoznacznym przekształceniem $L^2(\mathbf{T})$ na ℓ^2 . Przekształcenie odwrotne dane jest przez tak zwany szereg Fouriera*

$$\mathfrak{F}^{-1} : \ell^2 \rightarrow L^2(\mathbf{T}), \quad \{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \mapsto f, \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{i n x}.$$

Szereg Fouriera jest zbieżny w $L^2(\mathbf{T})$. Zachodzą następujące równości

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2, \quad \langle f, g \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}.$$

dowód. Przypomnijmy, że w $L^2(\mathbf{T})$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Biorąc pod uwagę, że układ (17) stanowi bazę ortonormalną przestrzeni $L^2(\mathbf{T})$, powyższe twierdzenie jest szczególnym przypadkiem twierdzenia o własnościach baz, które udowodniliśmy w rozdziale o przestrzeni Hilberta. $\square$

Przykład. Niech $f \in L^2(\mathbf{T})$ będzie dana przez

$$(18) \quad f(x) = \begin{cases} -1 & : -\pi < x \leq 0 \\ 1 & : 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Przypomnijmy, że elementy w $L^2(\mathbf{T})$ można rozważać jako funkcje na całej prostej, okresowe o okresie 2π , albo jako funkcje na przedziale $[-\pi, \pi]$. (18) definiuje więc element z $L^2(\mathbf{T})$. W języku inżynierów powyższa funkcja (lub jej 2π okresowe rozszerzenie na $\mathbf{R}$) nazywa się „falą prostokątną”. Fala prostokątna jest typowym przykładem sygnału występującym na przykład w każdym urządzeniu zawierającym mikroprocesor. Policzymy współczynniki Fouriera f

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

Niech $n \neq 0$.

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i n x} dx \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 e^{-i n x} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-i n x} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (e^{-i n x} - e^{i n x}) dx \\
 &= \frac{-2i}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(n x) dx \\
 &= \frac{i}{\pi n} \cos(n x) \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{i}{\pi n} ((-1)^n - 1) \\
 &= \begin{cases} \frac{2}{i \pi n} & : n - \text{nieparzyste} \\ 0 & : n - \text{parzyste} \end{cases}
 \end{aligned}$$

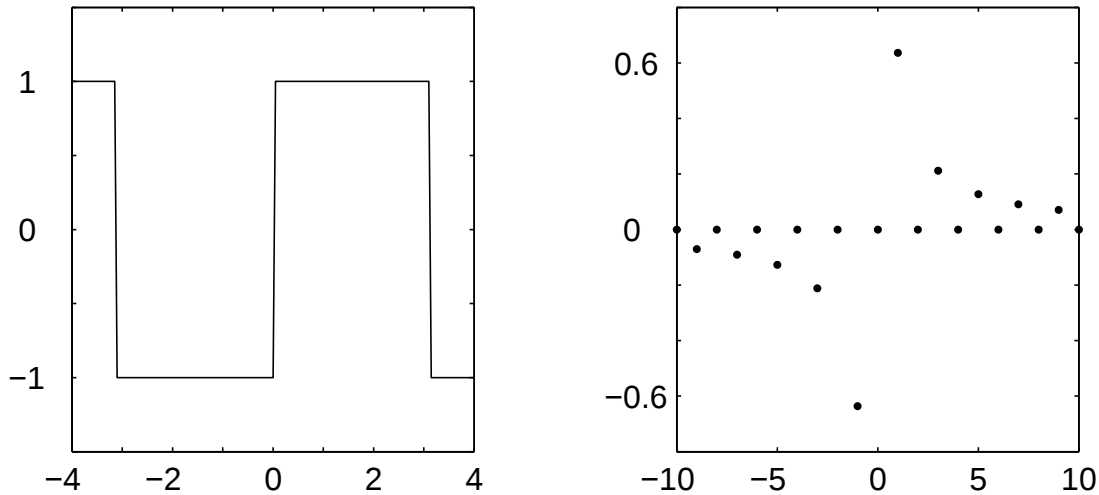


Fig. 3. Funkcja f i jej współczynniki Fouriera

Zgodnie z twierdzeniem Plancherela funkcja f rozwija się więc w następujący szereg Fouriera. Przypomnijmy, że szereg Fouriera jest zbieżny do f w $L^2(\mathbf{T})$, a niekoniecznie w poszczególnych punktach x . W tym konkretnym przypadku szereg Fouriera jest zbieżny w każdym

punkcie x , ale w punktach $0, \pm\pi$ jest zbieżny do 0, a nie do wartości $f(x)$.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ nieparzyste}}}^{\infty} \frac{2}{i\pi n} e^{inx} \\
 &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ nieparzyste}}}^{\infty} \frac{2}{i\pi n} (e^{inx} - e^{-inx}) \\
 &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ nieparzyste}}}^{\infty} \frac{4}{\pi n} \sin nx \\
 &= \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right).
 \end{aligned}$$

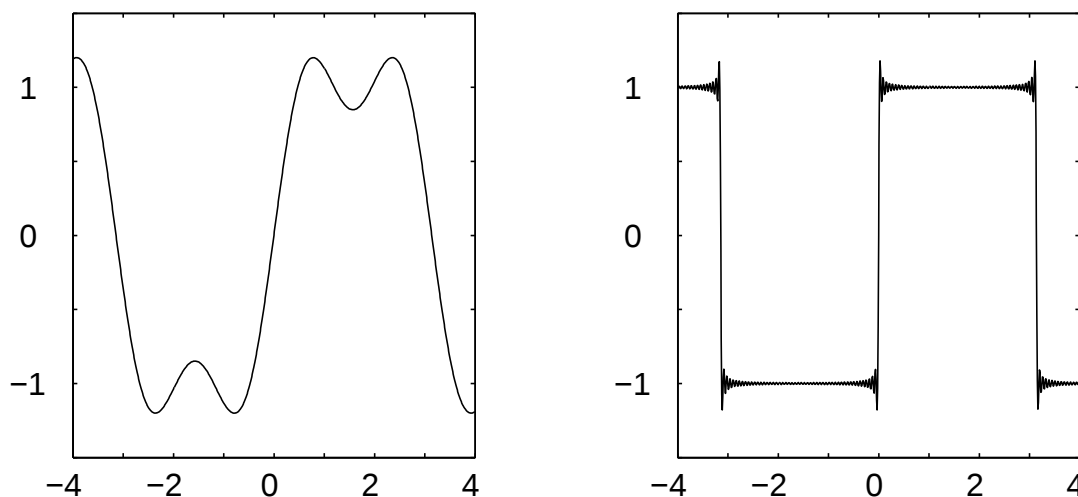


Fig. 4. Przybliżenie funkcji f harmonicznymi do 3 i 19 włącznie

Na wykresie przybliżenia f sumami częściowymi szeregu Fouriera (tak zwanymi *harmonicznymi*) widać tak zwane zjawisko Gibbsa. W pobliżu nieciągłości skokowej funkcji f (na przykład w pobliżu 0) suma częściowa szeregu Fouriera ma „szpilki”. Szpilki mają zawsze określoną wysokość: suma skończona „przestrzela” wysokość skoku funkcji f o około 9%. Dla coraz dalszych sum częściowych szeregu Fouriera (coraz dokładniejszych przybliżeń f) „szpilki” przysuwają się do nieciągłości, ale zawsze zachowują swoją wysokość. Można to udowodnić. Jako zastosowanie obliczonych powyżej współczynników Fouriera fali prostokątnej obliczymy klasyczną sumę. Dla fali prostokątnej (18) mamy

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 1,$$

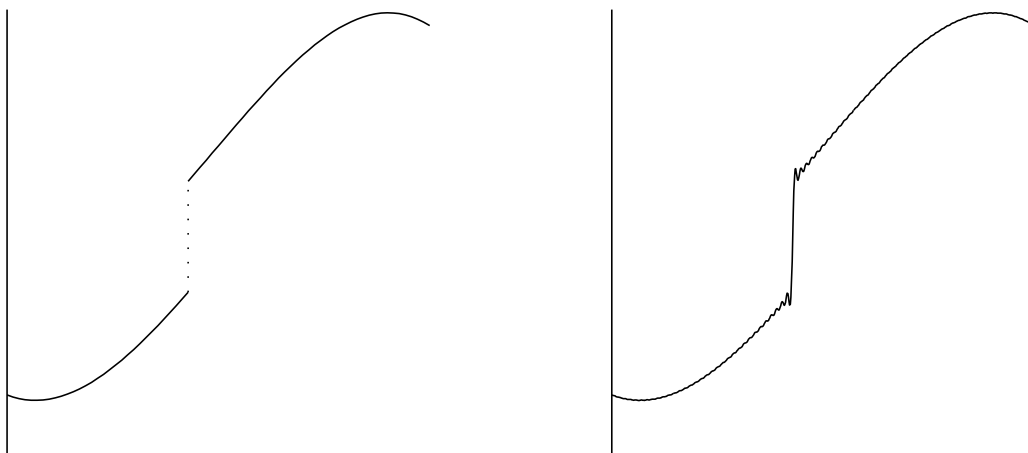


Fig. 5. Zjawisko Gibbsa. Z prawej bardzo dokładne przybliżenie funkcji mającej nieciągłość skokową. Szpilki po obu stronach nieciągłości zawsze występują, i zawsze mają określoną wysokość.

a z drugiej strony

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ nieparzyste}}}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ nieparzyste}}}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Podstawiając do równości Plancherela otrzymujemy więc

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ nieparzyste}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Następnie

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{8} &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ nieparzyste}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ parzyste}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

i w końcu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

W podobny sposób, stosując równość Plancherela dla odpowiedniej funkcji możemy obliczyć sumę

$$(19) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

dla dowolnej liczby całkowitej parzystej α . Jeżeli α nie jest liczbą całkowitą parzystą, to o sumach (19) niewiele wiadomo. Można, na przykład, udowodnić, że dla $\alpha = 3$ suma (19) jest liczbą niewymierną, ale dowód jest skomplikowany. Twierdzenie Plancherela jest więc bardzo przydatne.

Definicja. Splotem dwóch funkcji f i g okresowych o okresie 2π nazywamy funkcję

$$(20) \quad f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) g(y) dy,$$

o ile całka istnieje dla każdego x . Splotem dwóch ciągów $\alpha = \{\alpha_n\}$, $\beta = \{\beta_n\}$ nazywamy ciąg

$$(21) \quad \alpha * \beta(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{n-m} \beta_m,$$

o ile powyższa suma istnieje dla każdego $n \in \mathbf{Z}$.

Jeżeli f i g są całkowalne na $[-\pi, \pi]$, to splot $f * g$ istnieje dla (prawie) każdego x , jest okresowy o okresie 2π i jest całkowalny po okresie. Określenie „prawie każdy punkt” ma ścisłe znaczenie, ale nam wystarczy znaczenie intuicyjne: splot może nie istnieć w jakimś punkcie, albo nawet w wielu punktach, ale tworzących razem zbiór pomijalnie mały z punktu widzenia całkowania. We wzorze (20) f i g traktujemy jako funkcje okresowe, o okresie 2π . Możemy również myśleć o nich jako o funkcjach określonych na odcinku $[-\pi, \pi]$, wtedy działanie $x - y$ należy rozumieć modulo 2π . Jeżeli oba ciągi są sumowalne z kwadratem, $\alpha, \beta \in \ell^2$, to splot istnieje, a jeżeli są absolutnie sumowalne, to splot istnieje i też jest absolutnie sumowalny. Sploty (20) i (21) są przemienne: $f * g = g * f$ i $\alpha * \beta = \beta * \alpha$.

Własności transformaty Fouriera na $L^2(\mathbf{T})$. Transformata w $L^2(\mathbf{T})$ ma własności analogiczne do własności transformaty w $L^2(\mathbf{R})$. Przy odpowiednich założeniach mamy

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(n) &= \hat{f}(n) \hat{g}(n), \\ \widehat{(f \cdot g)}(n) &= (\hat{f} * \hat{g})(n), \\ g(x) = f(x - c) &\longrightarrow \hat{g}(n) = e^{-i c n} \hat{f}(n), \\ g(x) = e^{i m x} f(x) &\longrightarrow \hat{g}(n) = \hat{f}(n - m), \\ g(x) = f'(x) &\longrightarrow \hat{g}(n) = i n \hat{f}(n). \end{aligned}$$

Szereg Fouriera funkcji całkowalnej nie musi być zbieżny do tej funkcji. Znany jest przykład funkcji całkowalnej której szereg Fouriera nie jest zbieżny w żadnym punkcie. Jeżeli funkcja jest w $L^2(\mathbf{T})$, to jej szereg Fouriera jest do niej zbieżny w $L^2(\mathbf{T})$. Jednak nie musi być zbieżny w każdym punkcie. Można podać przykład funkcji ciągłej, której szereg Fouriera jest rozbieżny w jakimś punkcie. Są też dobre wiadomości. Poniższe twierdzenie ma charakter lokalny, to znaczy zbieżność szeregu Fouriera funkcji w punkcie zależy tylko od zachowania tej funkcji w otoczeniu tego punktu. Jest to o tyle ciekawe, że sam szereg Fouriera nie ma charakteru lokalnego. Każdy współczynnik Fouriera zależy od wszystkich wartości funkcji, zawiera całkę po całym okresie $\mathbf{T}$.

Twierdzenie. (a) Jeżeli f jest okresowa i całkowalna po okresie $[-\pi, \pi]$ to

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(n) = 0.$$

(b) Jeżeli istnieje pochodna $f'(\theta)$ w jakimś punkcie θ , to szereg Fouriera f jest zbieżny w tym punkcie θ do $f(\theta)$

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i n \theta}.$$

dowód. (a) Skorzystamy, jak poprzednio, z ciągłości przesunięć funkcji względem całki. Najpierw zauważmy, że jeżeli funkcja jest okresowa o okresie 2π , to całka z tej funkcji po przedziale $[a, a + 2\pi]$ nie zależy od a . Następnie obliczamy

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i n x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\pi/n}^{\pi+\pi/n} f(x) e^{-i n x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) e^{-i n(x+\pi/n)} dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) e^{-i n x} dx, \end{aligned}$$

a więc

$$\begin{aligned} |2\hat{f}(n)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \right) e^{-i n x} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \right| dx \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0. \end{aligned}$$

(b) Wprowadźmy funkcję pomocniczą

$$g(x) = \frac{f(x) - f(\theta)}{e^{-i x} - e^{-i \theta}}.$$

Zauważmy, że g jest okresowa o okresie 2π , i całkowalna po okresie. Całkowalność wynika z tego, że w pewnym otoczeniu θ jest ograniczona (z istnienia pochodnej $f'(\theta)$), a poza otoczeniem θ mianownik jest ograniczony od dołu. Z (a) wynika, że $\hat{g}(n) \rightarrow 0$ gdy $n \rightarrow \pm\infty$. Zauważmy jednak, że skoro

$$g(x) e^{-i x} - g(\theta) e^{-i \theta} = f(x) - f(\theta),$$

wiec dla wszystkich n

$$\hat{g}(n+1) - \hat{g}(n) e^{-i \theta} = \widehat{f}(n),$$

gdzie $\tilde{f}(x) = f(x) - f(\theta)$. Mnożąc obie strony przez $e^{i(n+1)\theta}$ otrzymujemy

$$\hat{g}(n+1) e^{i(n+1)\theta} - \hat{g}(n) e^{i n \theta} = e^{i \theta} \widehat{f}(n) e^{i n \theta}.$$

Sumując obie strony po wszystkich $n = -N, \dots, M$, i zwiijając sumę teleskopową po lewej stronie mamy

$$\hat{g}(M+1)e^{i(M+1)\theta} - \hat{g}(-N)e^{i(-N)\theta} = e^{i\theta} \sum_{n=-N}^M \widehat{\tilde{f}}(n) e^{in\theta}.$$

Korzystając z (a) lewa strona $\rightarrow 0$ gdy $M, N \rightarrow \infty$, więc podobnie dzieje się z prawą stroną. Zauważmy, że $\widehat{\tilde{f}}(n) = \hat{f}(n)$ dla $n \neq 0$, oraz $\widehat{\tilde{f}}(0) = \hat{f}(0) - f(\theta)$. Tak więc

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\tilde{f}}(n) e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta} - f(\theta).$$

Udowodniliśmy więc, że szereg Fouriera f jest zbieżny w θ i jego sumą jest $f(\theta)$. $\square$

Transformata Fouriera w $L^2(\mathbf{T}^n)$ (wielokrotne szeregi Fouriera). Teoria jest analogiczna do 1-wymiarowej:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i k \cdot x} dx_1 \cdots dx_n, \quad k = (k_1, \dots, k_n), \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

$$\check{f}(x) = \sum_{k_1, \dots, k_n = -\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{i k \cdot x},$$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx_1 \cdots dx_n = \sum_{k_1, \dots, k_n = -\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)},$$

$$\|f\|^2 = \sum_{k_1, \dots, k_n = -\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2.$$

Nie ma istotnych różnic w dowodach powyższych faktów

Transformata Fouriera w ℓ_p^2 (dyskretna transformata Fouriera). W przestrzeni p -elementowych wektorów transformata Fouriera jest wzajemnie jednoznacznym przekształceniem ℓ_p^2 na siebie. Dla $x = (x(0), \dots, x(p-1)) \in \ell_p^2$ mamy

$$\hat{x}(l) = \sum_{j=0}^{p-1} x(j) e^{-i \frac{2\pi l j}{p}}, \quad l = 0, \dots, p-1,$$

$$\check{x}(j) = \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} x(l) e^{i \frac{2\pi j l}{p}}, \quad j = 0, \dots, p-1,$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=0}^{p-1} x(j) \overline{y(j)} = \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} \hat{x}(j) \overline{\hat{y}(j)} = \frac{1}{p} \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle,$$

$$\|x\|^2 = \frac{1}{p} \|\hat{x}\|^2.$$

Powyższe wzory wynikają z następującej obserwacji

$$\sum_{l=0}^{p-1} e^{i \frac{2\pi j l}{p}} = \begin{cases} p & : j = 0 \\ 0 & : j \neq 0. \end{cases}$$

Splotem dwóch elementów $x, y \in \ell_p^2$ nazywamy element

$$(22) \quad x * y(k) = \sum_{l=0}^{p-1} x(k-l) y(l).$$

Jeżeli o x i y myślimy jako o wektorach p -elementowych to działanie $k-l$ należy rozumieć jako odejmowanie modulo p , wtedy k przebiega zakres $0, \dots, p-1$ a więc splot też jest wektorem p -elementowym. Jeżeli natomiast o elementach x i y myślimy jako o ciągach p -okresowych, to działanie $k-l$ w (22) jest zwykłym odejmowaniem, i splot $x*y$ też jest ciągiem p -okresowym. Jak się łatwo domyśleć, zachodzi następujący wzór

$$\widehat{x * y}(k) = \hat{x}(k) \hat{y}(k).$$

Szybka transformata Fouriera. Dyskretna transformata Fouriera występuje często w zastosowaniach. Jeżeli chcemy policzyć numerycznie transformatę Fouriera funkcji, to w rzeczywistości sprowadza się to do policzenia dyskretnej transformaty Fouriera pewnej ilości próbek danej funkcji. Obliczenie dyskretnej transformaty Fouriera p -elementowego wektora $x = (x(0), \dots, x(p-1))$ sprowadza się do pomnożenia go przez macierz: $\hat{x} = A_p x$, gdzie A_p jest $p \times p$ macierzą

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-i 2\pi/p} & \dots & e^{-i 2\pi(p-1)/p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-i 2\pi(p-1)/p} & \dots & e^{-i 2\pi(p-1)(p-1)/p} \end{pmatrix},$$

o współczynnikach $\{e^{-i 2\pi(k-1)(l-1)/p}\}_{k,l=1}^p$. Postępując naiwnie, do obliczenia transformaty Fouriera długości p będziemy więc musieli wykonać p^2 mnożeń zmiennoprzecinkowych. Istnieje szybszy algorytm obliczania transformaty, wykorzystujący występujące w macierzy A_p symetrie. Jest to tak zwana szybka transformata Fouriera (FFT), która redukuje liczbę mnożeń do $p \log p$. Korzyść jest wielka: jeżeli $p = 10^6$, to szybka transformata Fouriera jest 50 tysięcy razy szybsza od algorytmu naiwnego. Jeżeli nasz komputer, używając algorytmu FFT policzy transformatę w godzinę, to używając algorytmu naiwnego potrzebowałby na to ponad 6 lat. Algorytm FFT odkryto w latach 60 ubiegłego wieku. Sam algorytm jest bardzo prosty, i wkrótce okazało się, że był stosowany już od dawna. Obliczenia z wykorzystaniem algorytmu FFT znaleziono w pracach Gaussa z końca XVIII wieku. Wniosek płynie z tego następujący: matematycy częściej mogliby interesować się zastosowaniami, a inżynierowie częściej mogliby zaglądać do prac teoretyków. I jedni i drudzy mogą znaleźć jakąś niespodziankę.

Algorytm FFT jest bardzo prosty. Zamiast od razu formułować odpowiednie twierdzenie przeprowadźmy proste rachunki, które wszystko wyjaśnią. Niech długość sygnału $x = (x(0), x(1), \dots, x(p-1))$ będzie potęgą 2: $p = 2^q$, gdzie $q = 1, 2, \dots$, wtedy dla $l = 0, 1, 2, \dots, p-$

1

$$\begin{aligned}
\hat{x}(l) &= \sum_{k=0}^{p-1} x(k) e^{-\frac{2\pi i k l}{p}} \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ n\text{-parzyste}}}^{p-1} x(k) e^{-\frac{2\pi i k l}{p}} + \sum_{\substack{k=0 \\ n\text{-nieparzyste}}}^{p-1} x(k) e^{-\frac{2\pi i k l}{p}} \\
&= \sum_{k=0}^{p/2-1} x(2k) e^{-\frac{2\pi i (2k) l}{p}} + \sum_{k=0}^{p/2-1} x(2k+1) e^{-\frac{2\pi i (2k+1) l}{p}} \\
&= \sum_{k=0}^{p'-1} x'(k) e^{-\frac{2\pi i k l}{p'}} + e^{-\frac{2\pi i l}{p}} \sum_{k=0}^{p'-1} x''(k) e^{-\frac{2\pi i k l}{p'}} \\
&= \widehat{x'}(l) + e^{-\frac{2\pi i l}{p}} \widehat{x''}(l),
\end{aligned}$$

gdzie $p' = p/2$, $x'(k) = x(2k)$, $x''(k) = x(2k+1)$, $k = 0, \dots, p'-1$. Zauważmy, że $\widehat{x'}$ i $\widehat{x''}$ są okresowe o okresie p' , więc wystarczy je obliczyć dla $l = 0, \dots, p'-1$. Obliczenie transformaty Fouriera sygnału o długości p sprowadza się więc do:

- (1) rozdzielenia parzystych i nieparzystych składowych x ,
- (2) obliczenia transformaty Fouriera osobno dla składowych parzystych i nieparzystych, każda rzędu $p' = p/2$,
- (3) utworzenia kombinacji liniowej:

$$\begin{aligned}
\hat{x}(l) &= \widehat{x'}(l) + e^{-\frac{2\pi i l}{p}} \widehat{x''}(l), \\
\hat{x}(l + p') &= \widehat{x'}(l) - e^{-\frac{2\pi i l}{p}} \widehat{x''}(l)
\end{aligned}$$

dla $l = 0, \dots, p'$.

W ten sposób udowodniliśmy następujące twierdzenie, będące podstawą algorytmu FFT:

Twierdzenie (Lanczos, Danielson). *Macierz*

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-i 2\pi/p} & \dots & e^{-i 2\pi(p-1)/p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-i 2\pi(p-1)/p} & \dots & e^{-i 2\pi(p-1)(p-1)/p} \end{pmatrix}$$

można rozłożyć na czynniki

$$A_p = E_p \tilde{A}_{p/2} P_p,$$

gdzie macierz P_p jest postaci

$$P_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Macierz P_p ma dokładnie jedną jedynkę w każdym wierszu, a jej działanie na wektorze sprowadza się do przestawienia składowych: w pierwszej połowie umieszczone zostają składowe o numerach parzystych, a w drugiej składowe o numerach nieparzystych: $(x(0), x(2), \dots, x(p-2), x(1), x(3), \dots, x(p-1))$. Macierz $\tilde{A}_{p/2}$ ma dwie niezerowe, identyczne klatki

$$\tilde{A}_{p/2} = \begin{pmatrix} A_{p/2} & 0 \\ 0 & A_{p/2} \end{pmatrix}.$$

Działanie macierzy $\tilde{A}_{p/2}$ sprowadza się do obliczenia transformaty Fouriera rzędu $p/2$ osobno dla pierwszych i osobno dla ostatnich $p/2$ współczynników sygnału. W końcu macierz E_p ma postać czterech klatek

$$E_p = \begin{pmatrix} I & D \\ I & -D \end{pmatrix},$$

gdzie I są macierzami identycznościowymi rzędu $p/2$, a D jest macierzą diagonalną rzędu $p/2$ ze współczynnikami

$$e^{-\frac{2\pi i 0}{p}}, e^{-\frac{2\pi i 1}{p}}, \dots, e^{-\frac{2\pi i (p/2-1)}{p}}$$

na przekątnej. $\square$

Zauważmy, że z powyższego, prostego twierdzenia wynika następujący wniosek:

Wniosek. Transformatę Fouriera rzędu p (potęga 2) można obliczyć przy pomocy nie więcej niż $p \log_2 p$ mnożeń.

Dowód. Dowód jest indukcyjny względem potęgi 2. Transformata rzędu 2^1 to

$$\hat{x}(k) = x(0) \pm x(1), \quad k = 0, 1,$$

a więc występuje tylko 1 mnożenie, przez -1 . Krok indukcyjny używa twierdzenia. Do policzenia transformaty rzędu p potrzeba 2 razy tyle mnożeń co do policzenia transformaty rzędu $p/2$ (macierz $\tilde{A}_{p/2}$) i dodatkowo p mnożeń (macierz E_p). Macierz P_p nie wymaga mnożeń. Korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$2(p/2 \log_2(p/2)) + p = p(\log_2(p/2) + 1) = p \log_2 p. \quad \square$$

Uwaga: Oszacowaliśmy tylko ilość koniecznych mnożeń, gdyż to mnożenia głównie zajmują czas procesora. Podobnie jak ilość koniecznych mnożeń można oszacować ilość wszystkich koniecznych operacji arytmetycznych.

Następujące twierdzenie daje nam algorytm FFT:

Twierdzenie. Niech $p = 2^q$. Macierz A_p rozkłada się na iloczyn

$$(23) \quad A_p = E_p \tilde{E}_{p/2} \cdots \tilde{E}_2 \tilde{P}_4 \tilde{P}_8 \cdots \tilde{P}_{p/2} P_p,$$

gdzie E_{2^j} oraz P_{2^j} mają to samo znaczenie co w twierdzeniu Danielsona-Lanczosa, $\tilde{E}_{2^j}$ oraz $\tilde{P}_{2^j}$ to macierze $p \times p$ z $p/2^j$ klatkami E_{2^j} i P_{2^j} odpowiednio na przekątnej.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że twierdzenie Danielsona-Lanczosa można iterować:

$$(24) \quad A_p = E_p \tilde{A}_{p/2} P_p = E_p \tilde{E}_{p/2} \tilde{A}_{p/4} \tilde{P}_{p/2} P_p = \cdots = E_p \tilde{E}_{p/2} \cdots \tilde{E}_2 \tilde{A}_1 \tilde{P}_2 \cdots \tilde{P}_{p/2} P_p.$$

Macierze A_1 i P_2 , a więc także $\tilde{A}_1$ i $\tilde{P}_2$ są macierzami identycznościowymi, więc z (24) wynika (23). $\square$

Uwagi: (i) Każda z macierzy $\tilde{P}_{2^j}$ jest macierzą permutacji, więc ich iloczyn też jest macierzą permutacji. Wynika z tego, że przekształcenie

$$U = \tilde{P}_4 \tilde{P}_8 \cdots \tilde{P}_{p/2} P_p$$

sprowadza się do pewnego przestawienia współczynników wektora x . To przestawienie jest szczególnie proste do zaimplementowania w praktyce. Jeżeli oznaczymy $x = (x(0), \dots, x(p-1))$ oraz $Ux = x' = (x'(0), \dots, x'(p-1))$, to $x'(k) = x(l)$, gdzie k i l mają wzajemnie symetryczne rozwinięcia w układzie dwójkowym

$$(k)_2 = e_{q-1} \cdots e_0, \quad (l)_2 = e_0 \cdots e_{q-1}, \quad e_j = 0, 1.$$

Jest to tak zwane przekształcenie odwrócenia bitów.

(ii) Przedstawiony powyżej algorytm FFT jest tylko jednym z możliwych. Niektóre programy komputerowe stosują inny algorytm. Zauważmy, że macierz dyskretnej transformaty Fouriera A_p jest symetryczna. Twierdzenie Danielsona-Lanczosa można więc zapisać jako

$$(25) \quad A_p = A_p^t = P_p^t \tilde{A}_{p/2} E_p^t,$$

gdzie t oznacza transpozycję, i gdzie wykorzystaliśmy fakt, że A_p i $\tilde{A}_{p/2}$ są symetryczne, a więc niezmiennicze ze względu na transpozycję. Powyższy wzór można udowodnić bezpośrednio, grupując elementy sumy inaczej, niż robiliśmy to wcześniej. Niech $p' = p/2$.

$$\begin{aligned} \hat{x}(l) &= \sum_{k=0}^{p-1} x(k) e^{-i \frac{2\pi kl}{p}} \\ &= \sum_{k=0}^{p/2-1} x(k) e^{-i \frac{2\pi kl}{p}} + \sum_{k=p/2}^{p-1} x(k) e^{-i \frac{2\pi kl}{p}} \\ &= \sum_{k=0}^{p'-1} \left(x(k) e^{-i \frac{2\pi kl}{p}} + x(k+p') e^{-i \frac{2\pi (k+p')l}{p}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{p'-1} \left(x(k) + e^{-i \pi l} x(k+p') \right) e^{-i \frac{2\pi kl}{p}} \\ &= \sum_{k=0}^{p'-1} \left(x(k) + (-1)^l x(k+p') \right) e^{-i \frac{2\pi kl}{p}} \end{aligned}$$

Jeżeli $l = 2n$, $n = 0, \dots, p' - 1$ jest parzysta, to

$$\hat{x}(l) = \sum_{k=0}^{p'-1} (x(k) + x(k+p')) e^{-i \frac{2\pi kn}{p'}},$$

a jeżeli $l = 2n + 1$ jest nieparzysta, to

$$\hat{x}(l) = \sum_{k=0}^{p'-1} (x(k) - x(k + p')) e^{-i \frac{2\pi k}{p}} e^{-i \frac{2\pi kn}{p'}}.$$

Innymi słowy, parzyste współczynniki $\hat{x}$ to transformata rzędu p' wektora x' o współczynnikach

$$x'(k) = x(k) + x(k + p'),$$

a nieparzyste to transformata wektora x''

$$x''(k) = (x(k) - x(k + p')) e^{-i \frac{2\pi k}{p}}.$$

Łatwo sprawdzić, że powyższe obliczenia dają nam dokładnie (25). Zauważmy też, że macierz U z poprzedniej uwagi jest symetryczna, więc stosując ten algorytm również dochodzimy do przekształcenia odwrócenia bitów, z tym, że w poprzednim algorytmie był to pierwszy krok szybkiej transformaty, a w omawianym teraz wariancie jest to ostatni krok.

(iii) Omawialiśmy przypadek, gdy sygnał miał długość będącą potęgą 2. W praktyce to jest przypadek najważniejszy. Sygnały o innych długościach są przedłużane do najbliższej potęgi 2, na przykład dodaje się odpowiednią ilość zer. Szybki algorytm można jednak skonstruować niezależnie dla sygnałów o innych długościach.

Transformaty trygonometryczne. Naturalnym językiem transformat Fouriera w ich wszystkich wcieleniach, w tym także dyskretnej transformaty Fouriera jest język liczb zespolonych. W zastosowaniach jest to niepraktyczne. Sygnały rzeczywiste mają transformaty o wartościach zespolonych. Takie sygnały o wartościach zespolonych wymagają innych struktur do przechowywania i manipulacji. Nie jest to wielkim problemem, ale w praktyce wygodniejsze jest posługiwanie się transformatami, które sygnały rzeczywiste przekształcają na rzeczywiste. Są to tak zwane transformaty trygonometryczne. Transformaty takie powstają przez proste przekształcenie transformaty Fouriera i w związku z tym można stosować do nich szybkie algorytmy. Podstawową obserwacją jest fakt, że jeżeli sygnał rzeczywisty $x = (x(0), \dots, x(p-1))$ jest parzysty, czyli

$$x(p-k) = x(k),$$

to jego transformata Fouriera też jest rzeczywista, a jeżeli jest nieparzysty, czyli

$$x(p-k) = -x(k), \quad x(0) = 0,$$

to transformata jest czysto urojona. Istniejące sygnały można więc odpowiednio przedłużyć i zastosować do nich transformatę Fouriera odpowiedni wysokiego rzędu. W praktyce spotyka się kilka odmian transformat sinusowych i cosinusowych, które otrzymuje się właśnie według powyższego schematu. Na przykład, wyprowadzimy wzór na jedną z transformat cosinusowych. Niech dany będzie sygnał o długości p , $x = (x(0), \dots, x(p-1))$. Niech $\tilde{x}$ będzie przedłużeniem x o długości $2p$, zdefiniowanym następująco:

$$\tilde{x}(k) = \begin{cases} x(k) & : k = 0, \dots, p-1 \\ x(2p-k-1) & : k = p, \dots, 2p-1. \end{cases}$$

Zauważmy, że sygnał $\tilde{x}$ ma pewną symetrię — jest „parzysty” wokół punktu $p - 1/2$:

$$\tilde{x}((p - 1/2) + l) = \tilde{x}((p - 1/2) - l),$$

gdzie l jest liczbą połówkową, $2l = 1, 3, \dots, 2p - 1$. Obliczmy transformatę Fouriera długości $2p$ sygnału rozszerzonego $\tilde{x}$.

$$\begin{aligned} \tilde{x}(l) &= \sum_{k=0}^{2p-1} \tilde{x}(k) e^{-i \frac{2\pi k l}{2p}} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \tilde{x}(k) e^{-i \frac{2\pi k l}{2p}} + \sum_{k=p}^{2p-1} \tilde{x}(k) e^{-i \frac{2\pi k l}{2p}} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} x(k) e^{-i \frac{\pi k l}{p}} + \sum_{k=p}^{2p-1} x(2p - k - 1) e^{-i \frac{\pi k l}{p}}. \end{aligned}$$

Przenumerujmy składniki drugiej sumy, niech nowy indeks $k' = 2p - k - 1$. Nowy indeks (niech też nazywa się k) będzie od 0 do $p - 1$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{p-1} x(k) \left(e^{-i \frac{\pi k l}{p}} + e^{-i \frac{\pi (2p - k - 1) l}{p}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} x(k) \left(e^{-i \frac{\pi k l}{p}} + e^{i \frac{\pi k l}{p}} e^{i \frac{\pi l}{p}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} x(k) e^{i \frac{\pi l}{2p}} \left(e^{-i \frac{\pi (k + 1/2) l}{p}} + e^{i \frac{\pi (k + 1/2) l}{p}} \right) \\ &= e^{i \frac{\pi l}{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} x(k) \cos \left(\frac{\pi (k + 1/2) l}{p} \right). \end{aligned}$$

Zauważmy, że transformata Fouriera $\tilde{x}$ zależy tylko od współczynników „cosinusowych”

$$\hat{x}_c(l) = \sum_{k=0}^{p-1} x(k) \cos \left(\frac{\pi (k + 1/2) l}{p} \right).$$

Mamy więc

$$\widehat{\tilde{x}}(l) = 2 \cdot e^{i \frac{\pi l}{2p}} \cdot \hat{x}_c(l).$$

Zróbmy jeszcze następujące obserwacje

$$\begin{aligned} \widehat{\tilde{x}}(0) &= 2 \cdot \hat{x}_c(0), \\ \widehat{\tilde{x}}(p) &= e^{i \frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{p-1} x(k) \cos(\pi(k + 1/2)) = 0, \end{aligned}$$

gdyż $\cos(\pi(k + 1/2)) = 0$ dla każdej liczby całkowitej k . W końcu zauważmy, że

$$\widehat{x}(2p - l) = \widehat{x}(l).$$

Rekonstruując $\tilde{x}$, korzystając z odwrotnej transformaty Fouriera, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k) &= \frac{1}{2p} \sum_{l=0}^{2p-1} \widehat{x}(l) e^{i \frac{2\pi kl}{2p}} \\ &= \frac{1}{2p} \widehat{x}(0) + \frac{1}{2p} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq p}}^{2p-1} \widehat{x}(l) e^{i \frac{2\pi kl}{2p}} \\ &= \frac{1}{p} \widehat{x}_c(0) + \frac{1}{2p} \sum_{l=1}^{p-1} \left(\widehat{x}(l) e^{i \frac{2\pi kl}{2p}} + \widehat{x}(2p-l) e^{i \frac{2\pi k(2p-l)}{2p}} \right) \\ &= \frac{1}{p} \widehat{x}_c(0) + \frac{1}{2p} \sum_{l=1}^{p-1} 2\widehat{x}_c(l) \left(e^{i \frac{\pi l}{2p}} e^{i \frac{2\pi kl}{2p}} + \overline{e^{i \frac{\pi l}{2p}} e^{i \frac{2\pi kl}{2p}}} \right) \\ &= \frac{1}{p} \widehat{x}_c(0) + \frac{2}{p} \sum_{l=1}^{p-1} \widehat{x}_c(l) \cos \left(\frac{\pi(k + 1/2)l}{p} \right). \end{aligned}$$

Gdy $k = 0, \dots, p-1$ to $\tilde{x}(k) = x(k)$, więc otrzymaliśmy wzór na odwrotną transformatę cosinusową. Podsumowując: transformata cosinusowa i odwrotna transformata cosinusowa dane są wzorami

$$\begin{aligned} \widehat{x}_c(l) &= \sum_{k=0}^{p-1} x(k) \cos \left(\frac{\pi(k + 1/2)l}{p} \right), \quad l = 0, \dots, p-1, \\ \tilde{x}_c(k) &= \frac{1}{p} x(0) + \frac{2}{p} \sum_{l=1}^{p-1} x(l) \cos \left(\frac{\pi(k + 1/2)l}{p} \right), \quad k = 0, \dots, p-1. \end{aligned}$$

Transformata cosinusowa związana jest z dyskretną transformatą Fouriera wzorem

$$C_p = R_p A_{2p} Q_p,$$

gdzie C_p jest macierzą odpowiadającą transformacie cosinusowej, natomiast R_p i Q_p są pewnymi macierzami prostokątnymi, zawierającymi w większości zera. Dokładne wzory na R_p i Q_p można otrzymać analizując przeprowadzone powyżej rachunki.

Przypomnijmy, że powyższe wzory stanowią tylko jeden z możliwych wariantów transformat trygonometrycznych.

Inne transformaty.

-) Lokalne transformaty Fouriera i trygonometryczne
-) Transformata Laplace'a
-) Transformata Mellina
-) Transformata Zaka
-) Transformata Radona

Dodatek

KILKA KLASYCZNYCH TRANSFORMAT FOURIERA

Jądro Gaussa-Weierstrassa. Niech

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

W bieżącym rozdziale obliczyliśmy transformatę Fouriera w korzystając z triku używającego równań różniczkowych. Obecnie policzymy tą transformatę używając innego triku, teorii funkcji analitycznych. Myślę, że znajomość różnych trików jest przydatna, jeżeli, na przykład, musimy policzyć jakąś nową całkę. Będziemy korzystać z twierdzenia Cauchy'ego. Jeżeli F jest funkcją zmiennej zespolonej, analityczną w jakimś obszarze (bez dziur), to całka z F po konturze zamkniętej (czyli po krzywej kawałkami gładkiej i nie przecinającej się) leżącym w obszarze analityczności jest 0.

Wiemy, że

$$\hat{w}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1.$$

Ponieważ jądro Gaussa-Weierstrassa jest parzyste, więc jego transformata też jest parzysta. Wystarczy więc policzyć $\hat{w}(\xi)$ dla $\xi > 0$. Niech więc $\xi > 0$. Ustalmy $R > 0$, i zdefiniujmy następujący kontur γ na płaszczyźnie. Kontur będzie się składał z 4 kawałków

-) $\gamma_1 : [-R, R] \rightarrow \mathbf{C}; \gamma_1(t) = t$,
-) $\gamma_2 : [0, \xi] \rightarrow \mathbf{C}; \gamma_2(t) = R + it$,
-) $\gamma_3 : [-R, R] \rightarrow \mathbf{C}; \gamma_3(t) = -t + i\xi$,
-) $\gamma_4 : [0, \xi] \rightarrow \mathbf{C}; \gamma_4(t) = -R + i(\xi - t)$.

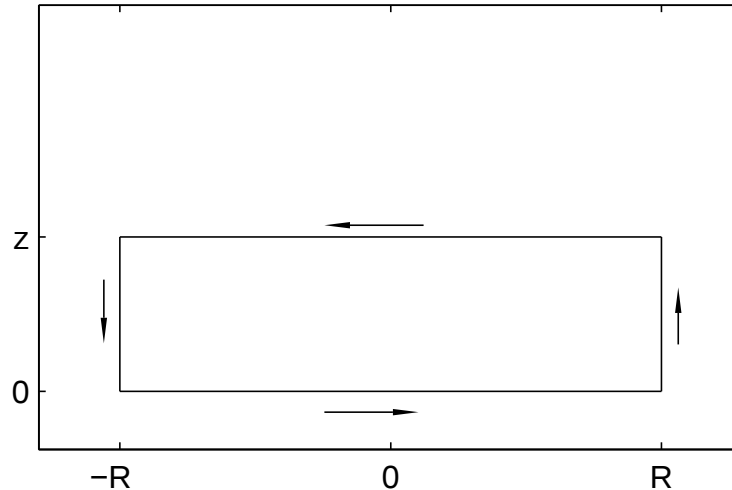


Fig. A. Kontur γ

Rozważmy $\hat{w}(\xi)$

$$\begin{aligned}\hat{w}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i x \xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2} - i x \xi + \frac{\xi^2}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} dx \\ &= \frac{e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx.\end{aligned}$$

Niech naszą funkcją analityczną będzie $F(z) = e^{-z^2/2}$. F jest analityczna na całej płaszczyźnie, bez punktów osobliwych. Całka po dowolnym konturze zamkniętym wynosi więc 0. Policzmy całkę po naszym konturze γ .

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} F(z) dz &= \int_{-R}^R e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \\ \int_{\gamma_3} F(z) dz &= \int_{-R}^R e^{-\frac{(-t+i\xi)^2}{2}} (-1) dt = - \int_{-R}^R e^{-\frac{(t+i\xi)^2}{2}} dt.\end{aligned}$$

Gdy $R \rightarrow \infty$ pierwsza całka, jak wiemy, dąży do $\sqrt{2\pi}$, a druga, zgodnie z obliczeniami powyżej, do $-\sqrt{2\pi}e^{\xi^2/2}\hat{w}(\xi)$. Pozostałe dwie całki tylko oszacujemy, i pokażemy, że obie dążą do 0, gdy $R \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}\left| \int_{\gamma_2} F(z) dz \right| &= \left| \int_0^\xi e^{-\frac{(R+it)^2}{2}} i dt \right| \\ &\leq \int_0^\xi e^{-\frac{R^2-t^2}{2}} dt \\ &= e^{-\frac{R^2}{2}} \int_0^\xi e^{\frac{t^2}{2}} dt \\ &\leq e^{-\frac{R^2}{2}} \xi e^{\frac{\xi^2}{2}}.\end{aligned}$$

Podobnie dla γ_4

$$\begin{aligned}\left| \int_{\gamma_4} F(z) dz \right| &= \left| \int_0^\xi e^{-\frac{(-R+i(\xi-t))^2}{2}} (-i) dt \right| \\ &\leq \int_0^\xi e^{-\frac{R^2-(\xi-t)^2}{2}} dt \\ &= e^{-\frac{R^2}{2}} \int_0^\xi e^{\frac{(\xi-t)^2}{2}} dt \\ &\leq e^{-\frac{R^2}{2}} \xi e^{\frac{\xi^2}{2}}.\end{aligned}$$

Dla ustalonego ξ widzimy, że obie całki dążą do 0 gdy $R \rightarrow \infty$. A więc,

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} F(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} F(z) dz + \dots + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_4} F(z) dz = \sqrt{2\pi} - \sqrt{2\pi} e^{\frac{\xi^2}{2}} \hat{w}(\xi).$$

Otrzymujemy więc to, co chcieliśmy

$$\hat{w}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Jądro Poissona. W przypadku 1-wymiarowym jądro Poissona dane jest wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

Transformatę Fouriera f obliczymy jak zwykle, całkując po odpowiednim konturze. Tej metody nie da się zastosować w przypadku wielowymiarowym. W związku z tym przypadek wielowymiarowy rozpatrzmy osobno. W przypadku jądra Gaussa-Weierstrassa przypadek wielowymiarowy sprowadzał się do jednowymiarowego. W przypadku jądra Poissona jest inaczej. Oba jądra są ważne w zastosowaniach. Jądro Gaussa-Weierstrassa wiąże się, na przykład, z rozkładem temperatur (widzieliśmy to w akapicie o równaniu ciepła), a jądro Poissona z tak zwanymi funkcjami harmonicznymi, które są stacjonarnymi (niezmiennymi w czasie) rozkładami temperatur.

Funkcja f jest całkowalna, i będziemy chcieli policzyć jej transformatę Fouriera

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i x \xi}}{1+x^2} dx.$$

f jest parzysta, więc $\hat{f}$ też jest parzysta. Wystarczy więc obliczyć $\hat{f}(0)$ i $\hat{f}(\xi)$ dla $\xi < 0$. Wartość w zerze jest prosta:

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} \arctan(x)|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \pi = 1.$$

W celu policzenia transformaty dla $\xi < 0$ naszą funkcją analityczną będzie

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \frac{e^{-i z \xi}}{1+z^2}.$$

Funkcja F jest analityczna na całej płaszczyźnie poza zerem mianownika, czyli punktami $\pm i$. Nasz kontur całkowania będzie otaczał jeden z tych punktów, więc skorzystamy z twierdzenia o residuach: całka po konturze zamkniętym jest równa sumie residuów w otoczonych przez kontur biegunach, razy $2\pi i$. W swoich punktach osobliwych F ma bieguny jednokrotne, więc residua są łatwe do policzenia

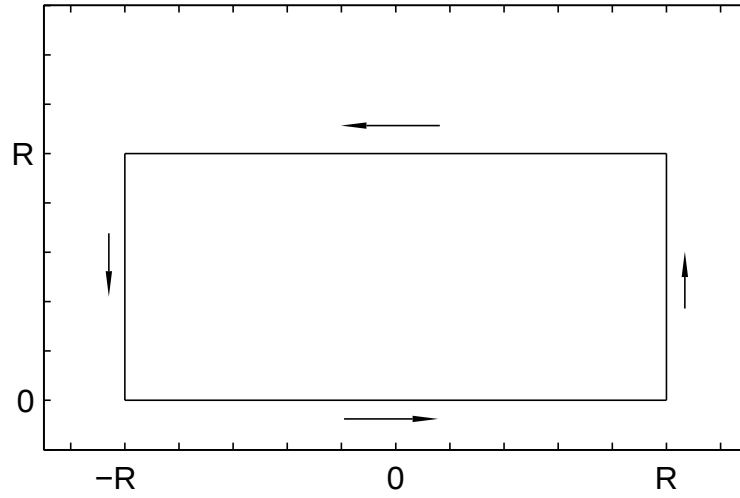
$$\text{Res}_{z=\pm i} F(z) = \lim_{z \rightarrow \pm i} (z \mp i) F(z).$$

Zdefiniujemy teraz kontur γ , który, jak zwykle, będzie się składał z 4 części.

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= t \text{ dla } t \in [-R, R], \\ \gamma_2(t) &= R + i t \text{ dla } t \in [0, R], \\ \gamma_3(t) &= -t + i R \text{ dla } t \in [-R, R], \\ \gamma_4(t) &= -R + (R - t) i \text{ dla } t \in [0, R]. \end{aligned}$$

Dla każdego $R > 1$ kontur γ otacza i i nie otacza $-i$, a więc, zgodnie z twierdzeniem o residuach

$$\int_{\gamma} F(z) dz = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i)e^{-i z \xi}}{\pi(z+i)(z-i)} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{-i z \xi}}{\pi(z+i)} = e^{\xi}.$$

Fig. B. Kontur γ

Pokażemy teraz, że całki z F po γ_i dążą do zera gdy $R \rightarrow \infty$, dla $i = 2, 3, 4$.

γ_2 :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\gamma_2} F(z) dz \right| &= \left| \frac{i}{\pi} \int_0^R \frac{e^{-i(R+it)\xi}}{1 + (R+it)^2} dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^R \frac{e^{t\xi}}{|1 + (R+it)^2|} dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^R \frac{e^{t\xi}}{|1 + R^2 - t^2 + 2iRt|} dt \\
 &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^R \frac{e^{t\xi}}{1 + R^2 - t^2} dt.
 \end{aligned}$$

Podobnie γ_4 :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\gamma_4} F(z) dz \right| &= \left| \frac{-i}{\pi} \int_0^R \frac{e^{-i(-R+(R-t)i)\xi}}{1 + (-R+(R-t)i)^2} dt \right| \\
 &= \left| \frac{-i}{\pi} \int_0^R \frac{e^{-i(-R+ti)\xi}}{1 + R^2 - t^2 - 2tRi} dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^R \frac{e^{t\xi}}{|1 + (R+it)^2|} dt \\
 &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^R \frac{e^{t\xi}}{1 + R^2 - t^2} dt.
 \end{aligned}$$

Obie całki mają więc wspólne oszacowanie. Oszacujmy dalej

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_0^R \frac{e^{t\xi}}{1+R^2-t^2} dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^{R/2} \frac{e^{t\xi}}{1+R^2-t^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{R/2}^R \frac{e^{t\xi}}{1+R^2-t^2} dt \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{R/2} \frac{dt}{R^2-t^2} + \frac{1}{\pi} e^{R\xi/2} \int_{R/2}^R dt \\
&\leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{R} \int_0^{1/2} \frac{dt}{1-t^2} + \frac{1}{\pi} \frac{R}{2} e^{R\xi/2} \\
&\leq \frac{2}{3\pi} \frac{1}{R} + \frac{R e^{R\xi/2}}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Skoro $\xi < 0$ to oba składniki dążą do zera gdy $R \rightarrow \infty$.

γ_3 :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma_3} F(z) dz \right| &= \left| \frac{-1}{\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{-i(-t+iR)\xi}}{1+(-t+iR)^2} dt \right| \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{R\xi}}{|1+t^2-R^2-2tRi|} dt \\
&= \frac{2e^{R\xi}}{\pi} \int_0^R \frac{dt}{|1+t^2-R^2-2tRi|} \\
&= \frac{2e^{R\xi}}{\pi} \int_0^{R/2} \frac{dt}{R^2-t^2-1} + \frac{2e^{R\xi}}{\pi} \int_{R/2}^R \frac{dt}{2tR},
\end{aligned}$$

(dla $R > 2/\sqrt{3}$). Dalej

$$\leq \frac{2e^{R\xi}}{\pi} \frac{R/2}{3/4 R^2 - 1} + \frac{2e^{R\xi}}{\pi} \frac{R/2}{R^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Podsumowując, pokazaliśmy, że

$$e^\xi = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} F(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{-it\xi}}{1+t^2} dt = \hat{f}(\xi).$$

Biorąc pod uwagę, że rachunki przeprowadziliśmy przy założeniu $\xi < 0$, oraz że $\hat{f}$ jest parzysta, otrzymaliśmy w końcu

$$\hat{f}(\xi) = e^{-|\xi|}.$$

Jądro Poissona $n \geq 1$.

Jądro Hilberta. Udowodnimy kilka faktów o funkcji

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Jest to funkcja całkowalna z kwadratem (bo $|f(x)| \leq \min\{1, 1/x^2\}$), niecałkowalna, ale całkowalna w sensie niewłaściwym. Wszystko to można wywnioskować z twierdzenia Plancherela, oraz własności transformaty Fouriera. Wiemy, że $f(x)$ jest transformatą Fouriera funkcji

$$\check{f}(x) = \frac{1}{2} \chi_{-1,1]}(x).$$

Była to pierwsza policzona w tym rozdziale transformata. Gdyby f była całkowalna, to $\hat{f}$, a więc i $\check{f}$ musiałyby być ciągłe, a nie jest. f nie może więc być całkowalna. Fakt, że jest całkowalna w sensie niewłaściwym wynika z twierdzenia Plancherela, i wzoru na odwrócenie transformaty w $L^2(\mathbf{R})$

$$\check{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f(\xi) e^{i x \xi} d\xi,$$

a więc

$$(*) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M f(x) dx = \frac{1}{2} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f(x) dx = \frac{2\pi}{2} \check{f}(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Naszym pierwszym celem będzie bezpośrednio pokazanie powyższych faktów, bez używania tego wszystkiego, co o transformacie Fouriera wiemy. Tak jak wspominałem wcześniej, znajomość różnych trików przyda się, kiedy będziemy chcieli policzyć jakąś nietypową całkę. Do obliczenia całki niewłaściwej (*) użyjemy całek z funkcji analitycznych. (*) przyda się nam za moment do policzenia transformaty Fouriera jądra Poissona. Najpierw uzasadnimy, że f nie jest całkowalna. Niech $M \in \mathbf{N}$ będzie dowolną liczbą naturalną.

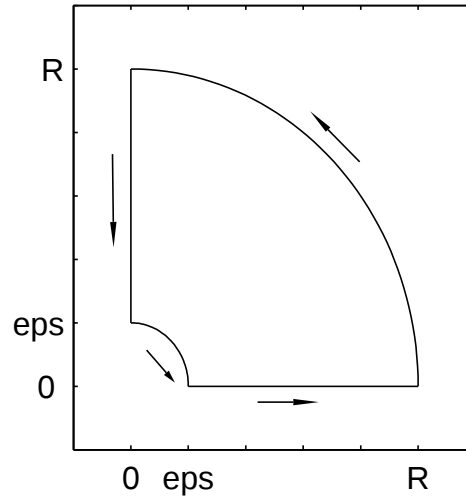
$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x} dx &\geq \int_\pi^{M\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \\ &\geq \sum_{k=1}^{M-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \\ &= \sum_{k=1}^{M-1} \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{(x + k\pi)} dx \\ &\geq \sum_{k=1}^{M-1} \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{k\pi} dx \\ &= \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \sin(x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Ponieważ M jest dowolne, a szereg harmoniczny jest rozbieżny, więc f nie jest całkowalna. Rozważmy następującą funkcję zmiennej zespolonej

$$F(z) = \frac{e^{iz}}{z}.$$

Jest to funkcja analityczna na całej płaszczyźnie, z wyjątkiem 0. Określmy sobie teraz kontur γ na płaszczyźnie, nie przechodzący przez zero i nie otaczający zera. Ustalmy ϵ i R , $0 < \epsilon < R$. Kontur γ składa się z 4 kawałków o następujących parametryzacjach:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= t \text{ dla } t \in [\epsilon, R], \\ \gamma_2(t) &= R e^{it} \text{ dla } t \in [0, \pi/2], \\ \gamma_3(t) &= (R - t) i \text{ dla } t \in [0, R - \epsilon], \\ \gamma_4(t) &= i e^{-it} \text{ dla } t \in [0, \pi/2]. \end{aligned}$$

Fig. C. Kontur γ

Wiemy, że całka z funkcji F po konturze γ wynosi 0. W szczególności jej część urojona też wynosi 0. Policzmy osobno części urojone każdej z całek

$$\int_{\gamma_i} F(z) dz, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Ich suma musi wynieść 0.

γ_1 :

$$\Im \int_{\gamma_1} F(z) dz = \Im \int_{\epsilon}^R \frac{e^{it}}{t} dt = \int_{\epsilon}^R \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

γ_3 :

$$\begin{aligned} \Im \int_{\gamma_3} F(z) dz &= \Im \left((-i) \int_0^{R-\epsilon} \frac{e^{i(R-t)i}}{(R-t)i} dt \right) \\ &= \Im \left(- \int_0^{R-\epsilon} \frac{e^{-(R-t)}}{(R-t)} dt \right) \\ &= \Im \left(- \int_0^{R-\epsilon} \frac{e^{-(R-t)}}{(R-t)} dt \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

gdyż całka jest czysto rzeczywista.

γ_2 :

$$\begin{aligned}
\Im \int_{\gamma_2} F(z) dz &= \Im \quad i R \int_0^{\pi/2} \frac{e^{i R e^{i t}}}{R e^{i t}} e^{i t} dt \\
&= \Im \quad i \int_0^{\pi/2} e^{i R (\cos(t) + i \sin(t))} dt \\
&= \Im \quad i \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin(t)} (\cos(R \cos(t)) + i \sin(R \cos(t))) dt \\
&= \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin(t)} \cos(R \cos(t)) dt.
\end{aligned}$$

 γ_4 :

$$\begin{aligned}
\Im \int_{\gamma_4} F(z) dz &= \Im \quad \epsilon \int_0^{\pi/2} \frac{e^{i \epsilon e^{-i t}}}{i \epsilon e^{-i t}} e^{-i t} dt \\
&= \Im \quad -i \int_0^{\pi/2} e^{-\epsilon (\cos(t) - i \sin(t))} dt \\
&= -\Re \int_0^{\pi/2} e^{-\epsilon \cos(t)} (\cos(\epsilon \sin(t)) + i \sin(\epsilon \sin(t))) dt \\
&= - \int_0^{\pi/2} e^{-\epsilon \cos(t)} \cos(\epsilon \sin(t)) dt.
\end{aligned}$$

W przypadku γ_2 i γ_4 całek przypuszczalnie nie da się policzyć dokładnie, ale nam wystarczą granice, które da się policzyć. Podsumowując, otrzymaliśmy następujący wzór:

$$(**) \quad \int_{\epsilon}^R \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{\pi/2} e^{-\epsilon \cos(t)} \cos(\epsilon \sin(t)) dt - \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin(t)} \cos(R \cos(t)) dt.$$

Zauważmy, że gdy $\epsilon \rightarrow 0^+$ to w pierwszej całce z prawej strony funkcja podcałkowa dąży do 1, i jest ograniczona przez 1, a więc korzystając z twierdzenia o zbieżności ograniczonej mamy

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\pi/2} e^{-\epsilon \cos(t)} \cos(\epsilon \sin(t)) dt = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2},$$

(w rzeczywistości zbieżność pod całką jest nawet jednostajna). W drugiej całce zauważmy, że

$$\left| e^{-R \sin(t)} \cos(R \cos(t)) \right| \leq e^{-R \sin(t)} \leq e^{-\frac{2Rt}{\pi}}, \quad \text{gdyż } \frac{2t}{\pi} \leq \sin(t), \quad \text{dla } t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

A więc,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin(t)} \cos(R \cos(t)) dt \right| &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2Rt}{\pi}} dt \\
&= -\frac{\pi}{2R} \left(e^{-\frac{2Rt}{\pi}} \right) \Big|_0^{\pi/2} \\
&= -\frac{\pi}{2R} (e^{-R} - 1) \\
&= \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}).
\end{aligned}$$

Widzimy więc, że gdy $R \rightarrow \infty$ całka dąży do zera. Podstawiając obie te granice do (**)
otrzymujemy

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0+}} \int_{\epsilon}^R \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$