Wykład 1.

Przestrzeń Hilberta

Sygnały. Funkcje (w języku inżynierów - sygnały) które będziemy rozważali na tym wykładzie będą kilku typów

Sygnały ciągłe (analogowe). •) $L^2(\mathbf{R})$ to funkcje na prostej spełniające warunek

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx < +\infty,$$

(czyli funkcje całkowalne z kwadratem). Z punktu widzenia zastosowań to bardzo interesująca przestrzeń sygnałów. Jeżeli $f(x)$ oznacza, na przykład, napięcie jakiegoś przebiegu elektrycznego, to warunek całkowalności z kwadratem oznacza, że reprezentowany przez to napięcie sygnał ma skończoną całkowitą energię - bardzo rozsądne założenie.
•) $L^2([-\pi,\pi])$, przestrzeń funkcji okresowych o okresie 2π (czyli $f(x+2\pi) = f(x)$), całkowalnych z kwadratem w okresie

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx < +\infty.$$

Podobnie jak poprzednio ten warunek oznacza, że wartość energii sygnału w okresie jest skończona. Długość okresu nie jest szczególnie ważna, gdyż poprzez proste przeskalowanie można nasze rozważania przenieść na sygnały o innych okresach. Okres 2π wybrany jest dla wygody (to jest okres funkcji trygonometrycznych, których będziemy używali). Przestrzeń tę będziemy też oznaczali przez $L^2(\mathbf{T})$, gdzie $\mathbf{T}$ oznacza okrąg jednostkowy, czyli odcinek $[-\pi,\pi]$ z utożsamionymi końcami.
•) Ogólniej, $L^2(\mathbf{R}^n)$ to funkcje n zmiennych rzeczywistych, całkowalnych z kwadratem. Szczególnie interesujący jest przypadek $n = 2$, sygnały takie reprezentują obrazy.
•) Ogólniej $L^2(\mathbf{T}^n)$, funkcje n zmiennych, względem każdej zmiennej okresowe o okresie 2π:

$$f(x_1,\dots,x_i+2\pi,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n), \qquad i = 1,\dots,n,$$

i całkowalne z kwadratem po swoim okresie:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} |f(x_1,\dots,x_n)|^2\, dx_1 \cdots dx_n < +\infty.$$

Również tutaj najbardziej interesujący (oprócz $n = 1$) jest przypadek $n = 2$.

Sygnały dyskretne (cyfrowe). •) $L^2(\mathbf{Z})$ to przestrzeń ciągów podwójnie nieskończonych $\{f_k\}$, sumowalnych z kwadratem

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2 < +\infty.$$

Przestrzeń tą często będziemy też oznaczać ℓ^2.
•) $L^2(\mathbf{Z}_p)$, $p = 2, 3, \dots$ to przestrzeń ciągów podwójnie nieskończonych $\{f_k\}$ okresowych o okresie p, czyli $f_{k+p} = f_k\ \forall\ k \in \mathbf{Z}$. Takie ciągi są, rzecz jasna, automatycznie sumowalne z kwadratem po okresie:

$$\sum_{k=0}^{p-1} |f_k|^2 < +\infty.$$

Tą przestrzeń będziemy też czasem oznaczać ℓ^2_p.
•) Ogólniej, $L^2(\mathbf{Z}^n)$ i $L^2(\mathbf{Z}^n_p)$ to przestrzenie ciągów n - wymiarowych okresowych ($L^2(\mathbf{Z}^n_p)$) lub nie

($L^2(\mathbf{Z}^n)$), sumowalnych z kwadratem, w przypadku $L^2(\mathbf{Z}_p^n)$ tylko po okresie. Jak poprzednio, najważniejsze przypadki to $n = 2$.

Uwagi. a) Sygnały występujące w rzeczywistości (w naturze) są najczęściej ciągłe. Sygnały dyskretne pojawiają się jako wynik próbkowania sygnałów występujących w rzeczywistości, i to one pojawiają się w algorytmach numerycznych. Poznamy fundamentalne (ale bardzo proste) twierdzenie mówiące kiedy sygnał ciągły można całkowicie odtworzyć z ciągu próbek (mówiąc w skrócie, sygnał musi mieć skończone widmo częstotliwościowe, a próbkowanie musi być wystarczająco częste). W przypadku kiedy sygnału nie da się zrekonstruować z próbek (na przykład z jakichś powodów próbkowanie jest zbyt rzadkie) dowiemy się jak przygotować sygnał do próbkowania, aby uzyskać najlepszy efekt rekonstrukcji (będzie to tak zwany filtr antyaliasingowy).
b) Zauważmy, że wszystkie rozważane przestrzenie sygnałów mają pewne wspólne cechy, ważne z punktu widzenia teorii. Tworzą je funkcje (o wartościach zespolonych) na jakimś zbiorze, całkowalne lub sumowalne na tym zbiorze z kwadratem. Ta wspólna cecha pozwoli nam wprowadzić w tych przestrzeniach strukturę przestrzeni Hilberta, nasze podstawowe narzędzie. Drugą cechą wspólną rozważanych przestrzeni sygnałów jest to, że zbiór na którym te sygnały są rozważane ($\mathbf{R}^n$, $\mathbf{T}^n$, $\mathbf{Z}^n$, $\mathbf{Z}_p^n$) ma strukturę grupy abelowej, na przykład $\mathbf{Z}_p$ z dodawaniem modulo p. To z kolei pozwala nam korzystać z naszego drugiego podstawowego narzędzia - transformaty Fouriera - w jej wielu wcieleniach, transformaty ciągłej, dyskretnej czy szeregu Fouriera.

Przestrzeń Hilberta. Przypomnijmy krótko pojęcie przestrzeni liniowej, przestrzeni metrycznej i przestrzeni zupełnej.
Przestrzeń liniowa to taka, której elementy można dodawać, odejmować i mnożyć przez skalary (w naszym przypadku skalarami są liczby zespolone). Przestrzeń liniową często nazywa się też przestrzenią wektorową, a jej elementy wektorami.
Przestrzeń metryczna to taka, w której określona jest funkcja odległości $d(x, y)$ (metryka) dzięki której można zdefiniować zbieżność ciągu: $x_n \to x$ jeżeli $d(x_n, x) \to 0$. Otrzymujemy przestrzeń topologiczną, można mówić o ciągłości funkcji, czy zbieżności szeregów.
Przestrzeń metryczna zupełna to taka przestrzeń w której każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny, czyli jeżeli ciąg $\{x_n\}$ elementów przestrzeni spełnia warunek

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbf{N}\ \forall\ n, m \geqslant N\ d(x_n, x_m) < \epsilon$$

to w tej przestrzeni istnieje x takie, że $x_n \to x$. Zupełność przestrzeni jest ważna z punktu widzenia teorii matematycznej. Wszystkie przestrzenie które będziemy rozważać są zupełne.

Przypomnijmy też funkcję wykładniczą zmiennej zespolonej, zdefiniowaną przez szereg potęgowy

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \text{ - liczba zespolona.}$$

Mamy następującą równość

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{1}$$

Otrzymujemy ją wstawiając $i\varphi$ do definicji, korzystając z faktu, że $i^2 = -1$, rozdzielając składniki zawierające i nie zawierające i (szereg jest zbieżny absolutnie) i korzystając z rozwinięć Taylora funkcji $\sin x$ i $\cos x$.

Definicja. Przestrzeń liniowa E nazywa się przestrzenią Hilberta, jeżeli istnieje w niej iloczyn skalarny, to znaczy funkcja $\langle x, y\rangle$ (o wartościach zespolonych) o następujących własnościach

(a) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (jest antysymetryczny),
(b) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ (liniowy względem pierwszej zmiennej),
(c) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$, $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$ (antyliniowy względem drugiej zmiennej),
(d) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ oraz $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(x, y, z to dowolne elementy E, α jest dowolną liczbą zespoloną, a $\overline{\alpha}$ jest liczbą sprzężoną do α). Dodatkowo E musi być zupełna, kwestię metryki i zupełności wyjaśnimy za chwilę.

Jeżeli elementy x i y spełniają

$$\langle x, y\rangle = 0,$$

to mówimy, że są prostopadłe lub ortogonalne. Mając w przestrzeni Hilberta iloczyn skalarny wprowadzamy tak zwaną normę (długość)wektorów

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Zauważmy, że dzięki własności (d) iloczynu skalarnego pierwiastek można zawsze obliczyć.

Twierdzenie (Nierówność Schwarza). *Dla dowolnych elementów x, y przestrzeni Hilberta E*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

dowód. Ustalmy $x, y \in E$ i dowolną liczbę rzeczywistą λ.

$$\begin{aligned}\|x + \lambda y\|^2 &= \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \\ &= \langle x, x + \lambda y\rangle + \lambda\langle y, x + \lambda y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle \\ &= \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda\Re\langle x, y\rangle + \|x\|^2,\end{aligned}$$

($\Re$ - część rzeczywista). Rozważane wyrażenie jest więc (dla ustalonych x i y) funkcją kwadratową zmiennej rzeczywistej λ, o współczynnikach $\|y\|^2$, $2\Re\langle x, y\rangle$ i $\|x\|^2$. Wyrażenie nie może być ujemne, więc funkcja kwadratowa może mieć co najwyżej jeden rzeczywisty pierwiastek. A więc wyróżnik funkcji kwadratowej musi być ujemny:

$$\left(2\Re\langle x, y\rangle\right)^2 - 4\|y\|^2\|x\|^2 \leqslant 0,$$

czyli

$$|\Re\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

Jeżeli $\langle x, y\rangle$ jest liczbą rzeczywistą to dowód jest zakończony. Jeżeli nie, to pozostaje jeszcze jeden trik: niech φ będzie liczbą rzeczywistą taką, że

$$\langle x, y\rangle = e^{i\varphi}|\langle x, y\rangle|.$$

Taką liczbę zawsze można znaleźć, $e^{i\varphi}$ jest „znakiem” zespolonym liczby $\langle x, y\rangle$ (chyba że $\langle x, y\rangle = 0$, ale w takim przypadku nierówność Schwarza jest natychmiastowa). Wtedy

$$e^{-i\varphi}\langle x, y\rangle = \langle x, e^{i\varphi}y\rangle$$

jest liczbą rzeczywistą. Wykorzystaliśmy tu równości

$$\frac{1}{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi} = \overline{e^{i\varphi}},$$

które łatwo wynikają z postaci trygonometrycznej (1). Z udowodnionej już części twierdzenia wynika, że

$$|\langle x, e^{i\varphi}y\rangle| \leqslant \|x\|\|e^{i\varphi}y\|.$$

W końcu, skoro, jak łatwo sprawdzić $|e^{i\varphi}| = 1$, mamy

$$|\langle x, y\rangle| = |e^{-i\varphi}\langle x, y\rangle|, \qquad \text{i} \qquad \|e^{i\varphi}y\| = \|y\|. \quad \square$$

Uwaga. Przyglądając się przedstawionemu wyżej dowodowi zauważmy, że równość (w nierówności Schwarza) zachodzi tylko jeżeli x i y są współliniowe (w sensie zespolonym), to znaczy istnieje liczba zespolona α taka, że

$$x = \alpha y.$$

Twierdzenie (Własności normy).

(a) $\|x\| \geqslant 0$ *oraz* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(b) $\|ax\| = |a|\|x\|$ *dla każdej liczby* a *i elementu* $x \in E$,
(c) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(nierówność trójkąta).*

dowód. Własności (a) i (b) wynikają wprost z definicji normy i własności iloczynu skalarnego. Sprawdźmy tylko nierówność trójkąta

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 \\ &= \left|\|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2\right| \\ &\leqslant \|x\|^2 + |\langle x,y\rangle| + |\langle y,x\rangle| + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Po drodze skorzystaliśmy z nierówności trójkąta dla liczb zespolonych

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|,$$

oraz z nierówności Schwarza. □

Norma umożliwia nam wprowadzenie w E metryki

$$d(x,y) = \|x - y\|.$$

Wymagane własności metryki

(a) $d(x,y) = d(y,x)$,
(b) $d(x,y) \geqslant 0$ oraz $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(c) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$,

wynikają wprost z wyszczególnionych powyżej własności normy. Metryka wprowadza w E topologię, można więc mówić o zbieżności w przestrzeni Hilberta ciągów czy szeregów i o ciągłości funkcji. Z nierówności Schwarza wynika, że iloczyn skalarny jest ciągłą funkcją dwóch zmiennych. Przestrzeń Hilberta, z definicji, musi być zupełna jako przestrzeń metryczna z tą metryką.

Przykłady. Wszystkie opisane poprzednio przestrzenie sygnałów są przestrzeniami Hilberta. Żeby się o tym przekonać należy w każdej przestrzeni wprowadzić iloczyn skalarny i sprawdzić warunki (a)–(d) definicji. Należy też udowodnić zupełność powstałej przestrzeni metrycznej. W każdym przypadku przy określeniu iloczynu skalarnego będziemy korzystać z następującej nierówności, prawdziwej dla dowolnych liczb zespolonych:

$$2|ab| \leqslant |a|^2 + |b|^2. \tag{2}$$

• $L^2(\mathbf{R}^n)$. Jeżeli $f, g \in L^2(\mathbf{R}^n)$ to funkcja $f \cdot \overline{g}$ jest absolutnie całkowalna na $\mathbf{R}^n$:

$$|f(x)\overline{g(x)}| \leqslant \frac{|f(x)|^2}{2} + \frac{\left|\overline{g(x)}\right|^2}{2},$$

więc

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left|f(x)\overline{g(x)}\right| dx \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n} |g(x)|^2\,dx < +\infty.$$

Iloczyn skalarny określamy następująco:

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\,dx. \tag{3}$$

Jak z tego wynika

$$\|f\| = \sqrt{\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2\,dx}, \tag{4}$$

a odległość dwóch funkcji

$$d(f,g) = \|f-g\| = \sqrt{\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)-g(x)|^2\,dx}.$$

Zbieżność ciągu funkcji w przestrzeni Hilberta $L^2(\mathbf{R}^n)$ to nie jest to samo, co zbieżność punktowa. Na przykład, niech

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & : x \in [n, n+1], \\ 0 & : \text{ poza tym.} \end{cases}$$

Jak łatwo zauważyć,

$$f_n(x) \to 0, \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

czyli $\{f_n\}$ jest zbieżny w każdym punkcji do funkcji stale równej 0. Z drugiej strony, dla dowolnego n

$$\|f_n\|^2 = \int_{\mathbf{R}} |f_n(x)|^2\,dx = \int_n^{n+1} dx = 1.$$

Ciąg nie jest więc zbieżny do 0 w $L^2(\mathbf{R})$. Można też podać przykład ciągu zbieżnego w $L^2(\mathbf{R})$, ale nie zbieżnego punktowo. Niech n będzie liczbą naturalną, i niech $n = 2^k + l$, dla pewnego $k = 0, 1, 2, \ldots$ i $l = 0, \ldots, 2^k - 1$. Mając taki rozkład n określamy

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & : \ x \in [2^{-k}l, 2^{-k}(l+1)), \\ 0 & : \ x \notin [2^{-k}l, 2^{-k}(l+1)). \end{cases}$$

Zauważmy, że ciąg $\{f_n\|$ nie jest zbieżny w żadnym punkcie $x \in [0,1)$, natomiast

$$\|f_n\|^2 = \int_{2^{-k}l}^{2^{-k}(l+1)} dx = 2^{-k}.$$

Łatwo zauważyć, że $k \to \infty$ gdy $n \to \infty$, więc

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 0,$$

ciąg $\{f_n\}$ zbiega więc do 0 w przestrzeni Hilberta.

Dla całkowitej ścisłości trzeba zrobić następującą uwagę, która odnosi się do wszystkich rozważanych przez nas przestrzeni sygnałów ciągłych. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : \ x = 0, \\ 0 & : \ x \neq 0. \end{cases} \tag{5}$$

f nie jest funkcją zerową, ale $\|f\| = 0$. Iloczyn skalarny wprowadzony wzorem (3) nie spełnia warunku (d) definicji dla pewnej grupy specyficznych funkcji takich jak (5). Definicję przestrzeni $L^2(\mathbf{R}^n)$ moglibyśmy uściślić, posługując się pojęciem klasy abstrakcji. W przypadku tego kursu aż taka ścisłość nie jest potrzebna. Wystarczy pamiętać, że jeżeli dwie funkcje różnią się na niewielkim zbiorze, na przykład na zbiorze skończonym, to traktujemy je jako tą samą funkcję. Uwagi te nie dotyczą funkcji ciągłych. Jeżeli f i g są ciągłe, oraz

$$\|f-g\|=0,$$

to $f=g$ wszędzie.

• $L^2(\mathbf{T}^n)$. Iloczyn skalarny wprowadzamy następująco

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}\,dx \qquad x=(x_1,\ldots,x_n),$$

podobnie jak poprzednio, korzystając z (2) pokazujemy, że całka zawsze istnieje.

• $L^2(\mathbf{Z}^n)$. Mając dwa ciągi z tej przestrzeni, $f=\{f_m\}$ i $g=\{g_m\}$, $m=(m_1,\ldots,m_n)$ określamy

$$\langle f,g\rangle=\sum_{m_1,\ldots,m_n=-\infty}^{\infty}f_m\overline{g_m}.$$

Ze względu na (2) szereg jest zbieżny absolutnie.

• $L^2(\mathbf{Z}_p^n)$. Podobnie dla ciągów okresowych

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{p^n}\sum_{m_1,\ldots,m_n=0}^{p-1}f_m\overline{g_m}.$$

W każdym z powyższych przypadków należy sprawdzić warunki (a)–(d) definicji przestrzeni Hilberta. Istotnym punktem do sprawdzenia pozostaje zupełność tak zdefiniowanych przestrzeni. W przypadku przestrzeni dyskretnych zupełność wynika z zupełności zbioru liczb rzeczywistych (każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny). Do dowodu zupełności $\mathbf{R}$ trzeba dokładnie przyjrzeć się definicji samych liczb rzeczywistych. W przypadku przestrzeni sygnałów ciągłych w dowodzie zupełności korzysta się z konstrukcji całki Lebesgue'a (przestrzenie zdefiniowane przy użyciu całki Riemanna nie są zupełne). Dowód zupełności pomijamy. W dalszej części kursu wystarczy (chciałoby się powiedzieć „w zupełności") nam sama świadomość tego, że przestrzenie są zupełne.

Bazy i rozpięcia. Zbiór elementów $\{e_n\}$ przestrzeni Hilberta E (skończony lub nieskończony) nazywa się liniowo niezależnym, jeżeli żaden jego element nie jest kombinacją liniową pozostałych. Można to zapisać następująco. Jeżeli dla jakichś liczb zespolonych $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ zachodzi

$$\alpha_1e_1+\ldots,\alpha_ke_k=0,$$

to $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$. Na przykład, zbiór funkcji $\{f_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ gdzie

$$\Delta(x)=\begin{cases} x & : \ x\in[0,1],\\ 2-x & : \ x\in[1,2],\\ 0 & : \ x\notin[0,2],\end{cases} \tag{6}$$

oraz $f_n(x)=\Delta(x-n)$ jest liniowo niezależny w $L^2(\mathbf{R})$. Jeżeli $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ są jakimiś liczbami zespolonymi, a $n_1,\ldots,n_k$ różnymi liczbami całkowitymi, to funkcja

$$\alpha_1f_{n_1}+\ldots\alpha_kf_{n_k}$$

ma wartość α_l w punkcie całkowitym n_l+1. Jeżeli więc jest równa wszędzie 0, to $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$.

Jeżeli jednak do tego zbioru dodamy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} x & : \ x \in [0, 2], \\ 6 - 2x & : \ x \in [2, 3], \\ 0 & : \ x \notin [0, 3], \end{cases}$$

to powstały zbiór nie jest już liniowo niezależny, bo

$$f(x) = f_0(x) + 2f_1(x),$$

a więc

$$f(x) - f_0(x) - 2f_1(x) = 0$$

a współczynniki $1, -1, -2$ nie są zerami.

Zbiór elementów $\{e_n\}$ (znowu, skończony lub nie) nazywa się ortonormalnym jeżeli

$$\langle e_n, e_m \rangle = \begin{cases} 0 & : \ n \neq m, \\ 1 & : \ n = m. \end{cases}$$

Zbiór ortonormalny składa się więc z elementów o normie 1, wzajemnie ortogonalnych. Zauważmy, że zbiór ortonormalny jest zawsze liniowo niezależny. Niech $\{e_n\}$ będzie ortonormalny, i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będą liczbami takimi, że

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k = 0.$$

Weźmy dowolne $j = 1, \ldots, k$ i obliczmy

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k, e_j \rangle \\ &= \alpha_1 \langle e_1, e_j \rangle + \cdots + \alpha_k \langle e_k, e_j \rangle \\ &= \alpha_j. \end{aligned}$$

W takim razie $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Pokazaliśmy więc że istotnie, zbiór ortonormalny jest liniowo niezależny.

Mając zbiór elementów $\{e_n\}$ przestrzeni Hilberta E rozpięciem liniowym

$$\mathrm{lin}\{e_n\}$$

nazywamy zbiór wszystkich kombinacji liniowych elementów $\{e_n\}$. Jest to najmniejsza podprzestrzeń liniowa przestrzeni E zawierająca wszystkie elementy zbioru $\{e_n\}$. Mówimy, że zbiór $\{e_n\}$ *rozpina* tą podprzestrzeń. Domknięcie tego zbioru

$$\overline{\mathrm{lin}\{e_n\}},$$

(czyli dołączenie do niego granic wszystkich zbieżnych ciągów) nazywamy domkniętym rozpięciem liniowym zbioru $\{e_n\}$.

Na przykład, rozpięcie liniowe zbioru funkcji danych przez (6) zawiera dokładnie te funkcje $f \in L^2(\mathbf{R})$, które spełniają następujące warunki: f jest ciągła, f jest liniowa na przedziałach postaci $[n, n+1]$, dla $n \in \mathbf{Z}$, i f jest 0 poza pewnym skończonym przedziałem. Z kolei domknięte rozpięcie liniowe tego zbioru to wszystkie funkcje $f \in L^2(\mathbf{R})$, ciągłe i liniowe na przedziałach postaci $[n, n+1]$. Jak łatwo sprawdzić

$$\overline{\mathrm{lin}\{f_n;\ n \in \mathbf{Z}\}} = \left\{ g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n f_n;\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty \right\}.$$

Innymi słowy, warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, żeby szereg

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n f_n$$

był zbieżny w przestrzeni $L^2(\mathbf{R})$ jest sumowalność z kwadratem ciągu współczynników α_n.

Można pokazać, że jeżeli zbiór $\{e_n\}$ jest skończony, to

$$\mathrm{lin}\{e_n\} = \overline{\mathrm{lin}\{e_n\}}.$$

Jeżeli mamy przeliczalny zbiór $\{e_n\}$ elementów przestrzeni Hilberta E, to zawsze możemy znaleźć zbiór ortonormalny $\{f_n\}$, o tym samym rozpięciu liniowym

$$\mathrm{lin}\{e_n\} = \mathrm{lin}\{f_n\}.$$

Konstrukcja zbioru $\{f_n\}$ nazywa się procedurą Gramma-Schmidta. Procedura jest indukcyjna. Niech elementy zbioru $\{e_n\}$ będą ustawione w ciąg $e_1, e_2, \dots$. Jeżeli ciąg zawiera elementy zerowe to odrzućmy je – nie wpływa to na rozpięcie liniowe. Niech

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}.$$

Mamy więc początek procedury indukcyjnej. Teraz opiszemy krok. Załóżmy, że utworzony już został zbiór ortonormalny $\{f_1, \dots, f_k\}$ o następującej własności: istnieje n_k takie, że

$$\mathrm{lin}\{e_1, \dots, e_{n_k}\} = \mathrm{lin}\{f_1, \dots, f_k\}. \tag{7}$$

Zauważmy, że element f_1 zdefiniowany przed chwilą spełnia powyższy warunek, z $k = 1$, $n_1 = 1$. Żeby wykonać krok indukcyjny znajdźmy element ciągu $\{e_n\}$, następny po e_{n_k}, który nie należy do powyższego rozpięcia (7). Jeżeli takiego elementu w ciągu nie znajdziemy, innymi słowy wszystkie pozostałe elementy $e_{n_k+1}, e_{n_k+2}, \dots$ należą do rozpięcia (7), to procedura się kończy, i

$$\mathrm{lin}\{e_n; n = 1, 2, \dots\} = \mathrm{lin}\{f_1, \dots, f_k\}.$$

W tym wypadku procedura Gramma-Schmidta jest zakończona, a powstały zbiór ortonormalny jest skończony. Jeżeli natomiast znajdziemy element ciągu $\{e_n\}$, następny po e_{n_k}, który nie należy do rozpięcia (7) (niech to będzie pierwszy taki element), to nazywamy go $e_{n_{k+1}}$, i definiujemy f_{k+1}

$$f_{k+1} = \frac{e_{n_{k+1}} - \sum_{l=1}^{k} \langle e_{n_{k+1}}, f_l \rangle f_l}{\left\| e_{n_{k+1}} - \sum_{l=1}^{k} \langle e_{n_{k+1}}, f_l \rangle f_l \right\|}.$$

Wprost z powyższego wzoru wynika, że $\|f_{k+1}\| = 1$. Niech $j = 1, \dots, k$ i zauważmy, że f_{k+1} i f_j są ortogonalne

$$\begin{aligned}
\langle f_{k+1}, f_j \rangle &= \frac{1}{\|\ \cdots\ \|} \left\langle \left(e_{n_{k+1}} - \sum_{l=1}^{k} \langle e_{n_{k+1}}, f_l \rangle f_l \right), f_j \right\rangle \\
&= \frac{1}{\|\ \cdots\ \|} \left(\langle e_{n_{k+1}}, f_j \rangle - \sum_{l=1}^{k} \langle e_{n_{k+1}}, f_l \rangle \langle f_l, f_j \rangle \right) \\
&= \frac{1}{\|\ \cdots\ \|} \left(\langle e_{n_{k+1}}, f_j \rangle - \langle e_{n_{k+1}}, f_j \rangle \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Rozszerzony zbiór $\{f_1, \dots, f_{k+1}\}$ jest więc ortonormalny. Pozostaje zauważyć, że

$$\mathrm{lin}\{e_1, \dots, e_{n_{k+1}}\} = \mathrm{lin}\{f_1, \dots, f_{k+1}\},$$

co natychmiast wynika z założenia indukcyjnego i konstrukcji elementu f_{k+1}. Krok indukcyjny jest więc wykonany, i procedura Gramma-Schmidta daje w wyniku skończony lub nieskończony zbiór ortonormalny $\{f_n\}$ o tym samym rozpięciu liniowym co $\mathrm{lin}\{e_n\}$. Zauważmy, że skoro rozpięcia liniowe są identyczne, to także domknięte rozpięcia liniowe

$$\overline{\mathrm{lin}\{e_n\}} = \overline{\mathrm{lin}\{f_n\}}.$$

Przykład. Niech

$$e_1(x) = \begin{cases} 1 & : x \in [1,2), \\ 0 & : x \notin [1,2), \end{cases}$$

natomiast następne elementy będą dane wzorem

$$e_n(x) = \begin{cases} 1 & : x \in [n-1,n+1), \\ 0 & : x \notin [n-1,n+1), \end{cases} \qquad n = 2,3,\ldots.$$

Pokażemy, że zbiór $\{e_1, e_2, \ldots\}$ jest liniowo niezależny. Niech będą dane współczynniki $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ i niech

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k = 0.$$

Weźmy liczbę całkowitą $j = 1, \ldots, k-1$. Wtedy wartość funkcji po lewej stronie w punkcie j jest równa $\alpha_j + \alpha_{j+1}$, a więc

$$\alpha_j + \alpha_{j+1} = 0, \quad j = 1, \ldots, k-1,$$

z kolei wartość lewej strony w punkcie k wynosi α_k, czyli $\alpha_k = 0$. Otrzymujemy wiec $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Zbiór wektorów $\{e_n\}$ jest więc liniowo niezależny. Nie jest jednak ortonormalny. Na przykład

$$\begin{aligned} \langle e_1, e_2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} e_1(x) e_2(x)\, dx \\ &= \int_1^2 2\, dx \\ &= 1. \end{aligned}$$

Zastosujmy więc procedurę Gramma-Schmidta. $\|e_1\| = 1$, więc $f_1 = e_1$.

$$e_2(x) - \langle e_2, f_1 \rangle f_1(x) = e_2(x) - e_1(x).$$

Otrzymujemy więc

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & : x \in [2,3), \\ 0 & : x \notin [2,3). \end{cases}$$

Kontynuując indukcyjnie otrzymujemy

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & : x \in [n,n+1), \\ 0 & : x \notin [n,n+1). \end{cases}$$

Zbiór $\{f_n\}$ jest ortonormalny i rozpina tą samą podprzestrzeń co zbiór wyjściowy $\{e_n\}$: podprzestrzeń funkcji stałych na przedziałach postaci $[n, n+1)$, równych 0 dla $x < 1$ i $x \geqslant M$ dla pewnej liczby naturalnej M.

Mówimy, że zbiór $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ elementów przestrzeni Hilberta E jest <u>zupełny</u>, jeżeli

$$\overline{\mathrm{lin}\{e_n\}} = E,$$

czyli każdy element przestrzeni E jest granicą ciągu kombinacji liniowych elementów zbioru $\{e_n\}$. Innymi słowy,

$$\forall\, x \in E\ \forall \epsilon > 0\ \exists\, \alpha_1, \ldots \alpha_k \quad \left\| x - \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n \right\| < \epsilon.$$

Ta zupełność jest pojęciem „zupełnie” nie związanym z zupełnością–w sensie przestrzeni metrycznej–dyskutowaną wcześniej. Można pokazać następujący fakt, często stosowany w sytuacji, gdy trzeba sprawdzić zupełność jakiegoś zbioru.

Fakt. *Zbiór $\{e_n\} \subset E$ jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy jedynym elementem $x \in E$ prostopadłym do wszystkich e_n jest 0.*

Definicja. Zbiór $\{e_n\}$ nazywa się bazą przestrzeni Hilberta E jeżeli jest liniowo niezależny i zupełny. $\{e_n\}$ nazywa się bazą ortonormalną jeżeli jest ortonormalny i zupełny.

Mówiąc luźno, zbiór tworzy bazę jeżeli do każdego elementu przestrzeni E można podejść dowolnie blisko jakąś kombinacją linową elementów bazy (zupełność), i zbiór nie zawiera żadnych zbędnych elementów (liniowa niezależność).

Uwaga. (a) Powyższa definicja różni się zasadniczo od pojęcia bazy przestrzeni liniowej wprowadzanego na wykładzie z algebry liniowej. W tamtej definicji każdy element przestrzeni można przedstawić jako kombinację liniową elementów bazy, a w tej definicji wystarczy, żeby do każdego elementu przestrzeni można było dowolnie blisko „podejść" kombinacjami liniowymi elementów bazy. Dla uniknięcia zamieszania tamtą, algebraiczną bazę czasami nazywa się „bazą Hamela", a tę „bazą topologiczną". Na tym wykładzie będziemy korzystali tylko z baz topologicznych, i będziemy je po prostu nazywali bazami. W przypadku przestrzeni skończenie wymiarowych oba pojęcia baz są identyczne.
(b) Można udowodnić, że dwie bazy tej samej przestrzeni są równoliczne. Liczbę elementów bazy (może być nieskończona) nazywamy wymiarem przestrzeni. Rozważane przez nas przestrzenie są zarówno skończenie wymiarowe (na przykład wymiar przestrzeni ℓ^2_p jest równy p) jak i nieskończenie wymiarowe (ℓ^2 czy przestrzenie sygnałów analogowych). Skończenie wymiarowe przestrzenie Hilberta są czasem nazywane przestrzeniami Euklidesowymi.
(c) Każdy układ liniowo niezależny można rozszerzyć do bazy (uzupełnić). Każdy układ ortonormalny można rozszerzyć do bazy ortonormalnej. Na tym wykładzie będziemy konstruować konkretne bazy w konkretnych przestrzeniach Hilberta.

Bazy ortonormalne są szczególnie wygodne w zastosowaniach. Poniżej przypomnimy na czym polega ta wygoda.

Twierdzenie. *Jeżeli $\{e_n\}$ jest bazą o.n. przestrzeni E to dla dowolnych liczb zespolonych $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ i dowolnego $x \in E$ zachodzi nierówność*

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n\rangle e_n \right\| \leqslant \left\| x - \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \ e_n \right\|. \tag{8}$$

Równość zachodzi tylko w przypadku $\alpha_n = \langle x, e_n\rangle$, $n = 1, \ldots, k$

dowód.

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n \right\|^2 &= \left\| x - \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n\rangle e_n + \sum_{n=1}^{k} \left(\langle x, e_n\rangle - \alpha_n\right) e_n \right\|^2 \\
&= \left\| x - \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n\rangle e_n \right\|^2 + \\
&\quad + 2\Re \left\langle x - \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n\rangle e_n, \sum_{m=0}^{k} \left(\langle x, e_m\rangle - \alpha_m\right) e_m \right\rangle + \\
&\quad + \left\| \sum_{n=1}^{k} \left(\langle x, e_n\rangle - \alpha_n\right) e_n \right\|^2 .
\end{aligned}$$

Powyższą równość otrzymaliśmy jak zwykle: normę sumy do kwadratu zapisaliśmy jako iloczyn skalarny sumy przez siebie, i skorzystaliśmy z liniowości iloczynu skalarnego. Rozważmy drugi składnik w uzyskanym wyrażeniu:

$$\left\langle x - \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n \rangle e_n, \sum_{m=1}^{k} \left(\langle x, e_m \rangle - \alpha_m \right) e_m \right\rangle = \sum_{m=1}^{k} \overline{\left(\langle x, e_m \rangle - \alpha_m \right)} \left\langle x - \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n \rangle e_n, e_m \right\rangle$$
$$= \sum_{m=1}^{k} \overline{\left(\langle x, e_m \rangle - \alpha_m \right)} \left(\langle x, e_m \rangle - \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, e_m \rangle \right).$$

Zauważmy, że ostatni nawias $= 0$, gdyż baza jest ortonormalna. Pokazaliśmy więc nierówność (8). Jeżeli zachodzi równość, to

$$\left\| \sum_{n=1}^{k} \left(\langle x, e_n \rangle - \alpha_n \right) e_n \right\| = 0.$$

Korzystając z własności normy kombinacja liniowa jest więc zerowa

$$\sum_{n=1}^{k} \left(\langle x, e_n \rangle - \alpha_n \right) e_n = 0.$$

Korzystając z liniowej niezależności elementów bazy otrzymujemy

$$\alpha_n = \langle x, e_n \rangle, \qquad n = 1, \ldots, k.$$

Udowodniliśmy więc ostatnią część twierdzenia. $\square$

Z definicji bazy wynika, że do każdego elementu można dowolnie blisko podejść *jakąś* kombinacją liniową elementów bazy. Powyższe twierdzenie mówi, że jeżeli baza jest ortonormalna, to najlepszymi kombinacjami liniowymi są kombinacje

$$\sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Mamy więc konkretny wzór na współczynniki tych „najefektywniejszych” kombinacji.

Wniosek. *Jeżeli* $\{e_n\}$ *jest bazą o.n. przestrzeni* E *to:*

(a) *dla dowolnego* $x \in E$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, \qquad \textit{(rozkład x względem bazy)}$$

(b) *jeżeli dla jakiegoś ciągu współczynników* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *zachodzi*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \ e_n,$$

to współczynniki muszą być iloczynami skalarnymi

$$\alpha_n = \langle x, e_n \rangle \qquad \textit{(jednoznaczność rozkładu)},$$

(c) *dla dowolnego* $x \in E$

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \qquad \textit{(równość Plancherela)}.$$

W powyższym wniosku przyjęliśmy, że baza jest nieskończona. Oczywiście, jeżeli jest skończona, to wniosek też jest prawdziwy a wszystkie sumy nieskończone zastępujemy skończonymi

dowód. (a) Korzystamy z poprzedniego twierdzenia. Niech $k \geqslant m$ i niech $\alpha_n = \langle x, e_n \rangle$ dla $n = 1, \dots, m$ i $\alpha_n = 0$ dla $n = m+1, \dots, k$. Nierówność z poprzedniego twierdzenia wygląda więc następująco

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n \rangle \ e_n \right\| \leqslant \left\| x - \sum_{n=1}^{m} \langle x, e_n \rangle \ e_n \right\|.$$

Dalej, z definicji bazy wiemy, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieją współczynniki $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ takie, że

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \ e_n \right\| < \epsilon.$$

Z poprzedniego twierdzenia i poprzedniej uwagi wynika w takim razie, że dla tego ϵ i tego k mamy

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{l} \langle x, e_n \rangle e_n \right\| \leqslant \left\| x - \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n \rangle e_n \right\| \leqslant \left\| x - \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \ e_n \right\| < \epsilon \quad \forall\, l \geqslant k,$$

a więc szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n,$$

jest zbieżny do x.
(b) Jeżeli

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \ e_n,$$

to stosując iloczyn skalarny i korzystając z jego ciągłości mamy

$$\langle x, e_n \rangle = \left\langle \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \ e_m, e_n \right\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \langle e_m, e_n \rangle = \alpha_n.$$

(c) Korzystając z ciągłości iloczynu skalarnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|x\|^2 = \langle x, x \rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, \sum_{m=1}^{\infty} \langle x, e_m \rangle e_m \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle x, e_m \rangle} \langle e_n, e_m \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle x, e_n \rangle \right|^2. \quad \square \end{aligned}$$

Uwaga. (i) Z powyższego wniosku wynika, że jeżeli baza $\{e_n\}$ jest ortonormalna, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \ e_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg współczynników jest sumowalny z kwadratem

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty.$$

(ii) Równości w (a) i (b) są równościami w przestrzeni E i, na przykład, równość w (a) oznacza

$$\lim_{N\to\infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle \; e_n \right\| = 0.$$

Elementy rozważanych przez nas przestrzeni są funkcjami, a zbieżność szeregu funkcyjnego w normie przestrzeni nie oznacza z reguły zbieżności w każdym punkcie.
(iii) Równość Plancherela

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

można rozumieć jako uogólnione (z przypadku 2-wymiarowego) twierdzenie Pitagorasa: kwadrat długości wektora jest sumą kwadratów jego składowych w kierunkach elementów bazy ortonormalnej.

Będziemy korzystać z następujących pojęć

Definicja. Zbiór $\{e_n\}$ elementów przestrzeni Hilberta E (skończony lub nie) nazywamy układem Riesza jeżeli istnieją stałe $A, B > 0$ takie, że dla dowolnego ciągu liczb $\{\alpha_n\}$

$$A \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \leqslant \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \; e_n \right\|^2 \leqslant B \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2. \tag{9}$$

Jeżeli układ Riesza jest dodatkowo zbiorem zupełnym (rozpina całą przestrzeń E), to nazywamy go bazą Riesza.

Warunek (9) wystarczy sprawdzić dla sum skończonych. Zauważmy też, że z warunku (9) wynika, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \; e_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy szereg współczynników jest sumowalny z kwadratem

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty.$$

Można pokazać, że jeżeli w powyższej definicji $A = B = 1$, to $\{e_n\}$ jest układem ortonormalnym. Baza Riesza jest więc pojęciem ogólniejszym, niż baza ortonormalna. Bazy Riesza są często stosowane w praktyce. Posiadają wszystkie główne zalety baz ortonormalnych. Na przykład, można pokazać, że jeżeli baza $\{e_n\}$ jest bazą Riesza to istnieje inna baza Riesza $\{f_n\}$ taka, że dla każdego $x \in E$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, f_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle f_n.$$

Dla bazy Riesza mamy więc, podobnie, jak dla bazy ortonormalnej, jawny wzór na znajdowanie współczynników bazowych, musimy tylko wygenerować wcześniej bazę $\{f_n\}$.

Przykład. Rozważmy ponownie przykład dany przez (6), $e_n(x) = \Delta(x-n)$. Wiemy, że elementy e_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ są liniowo niezależne, ale nie tworzą zbioru ortonormalnego. Pokażemy, że tworzą zbiór Riesza. Weźmy dowolne współczynniki α_n, $n = N, \ldots, M$, gdzie $N, M \in \mathbf{Z}$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n=N}^{M} \alpha_n \; e_n(x) \right|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=N}^{M} \alpha_n \; \Delta(x-n) \overline{\sum_{k=N}^{M} \alpha_k \; \Delta(x-k)dx} \\
&= \sum_{n,k=N}^{M} \alpha_n \overline{\alpha_k} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x-n)\Delta(x-k)\, dx \\
&= \sum_{n,k=N}^{M} \alpha_n \overline{\alpha_k} \beta_{k-n},
\end{aligned}$$

gdzie

$$\beta_l = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x)\Delta(x-l)\, dx = \begin{cases} \frac{2}{3} & : \; l = 0, \\ \frac{1}{6} & : \; l = \pm 1, \\ 0 & : \; |l| \geqslant 2. \end{cases}$$

Tak więc

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=N}^{M} \alpha_n \; e_n \right\|^2 &= \beta_0 \sum_{n=N}^{M} |\alpha_n|^2 + \beta_1 \sum_{n=N}^{M-1} \alpha_n \overline{\alpha_{n+1}} + \beta_{-1} \sum_{n=N+1}^{M} \alpha_n \overline{\alpha_{n-1}} \\
&= \beta_0 \sum_{n=N}^{M} |\alpha_n|^2 + 2\beta_1 \Re \left(\sum_{n=N}^{M-1} \alpha_n \overline{\alpha_{n+1}} \right).
\end{aligned}$$

Korzystając z nierówności Schwarza szacujemy ostatni składnik

$$\begin{aligned}
\left| \Re \left(\sum_{n=N}^{M-1} \alpha_n \overline{\alpha_{n+1}} \right) \right| &\leqslant \left| \sum_{n=N}^{M-1} \alpha_n \overline{\alpha_{n+1}} \right| \\
&\leqslant \left(\sum_{n=N}^{M-1} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=N}^{M-1} |\overline{\alpha_{n+1}}|^2 \right)^{1/2} \\
&\leqslant \sum_{n=N}^{M} |\alpha_n|^2.
\end{aligned}$$

Podsumowując powyższe otrzymujemy

$$(2/3 - 2/6) \sum_{n=N}^{M} |\alpha_n|^2 \leqslant \left\| \sum_{n=N}^{M} \alpha_n \; e_n \right\|^2 \leqslant (2/3 + 2/6) \sum_{n=N}^{M} |\alpha_n|^2.$$

Zgodnie z definicją, wektory $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tworzą układ Riesza ze stałymi $A = 1/3$ i $B = 1$. Używając procedury Gramma-Schmidta możemy wyprodukować z układu Riesza $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ układ ortonormalny. Jednak nowy układ ortonormalny nie posiadałby ważnych własności, na przykład tej, że wszystkie jego elementy są przesunięciami jednej funkcji-matki. Można udowodnić, że dla tego układu Riesza „dualny" układ $\{f_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, o którym była mowa powyżej również składa się z całkowitych przesunięć jednej funkcji Θ. Ta jedna funkcja jest ciągła, liniowa pomiędzy sąsiednimi liczbami całkowitymi, a jej wartości w punktach $n \in \mathbf{Z}$ wynoszą

$$\Theta(n) = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)^{|n|}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Definicja. Zbiór elementów $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ przestrzeni Hilberta E (niekoniecznie liniowo niezależny) nazywamy rozpięciem dokładnym jeżeli dla każdego $x \in E$

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2.$$

Z definicji wynika, że rozpięcie dokładne musi być zbiorem zupełnym. Jeżeli $\{e_n\}$ jest rozpięciem dokładnym i jest zbiorem liniowo niezależnym, to musi być bazą ortonormalną. Rozpięcie dokładne jest więc pojęciem ogólniejszym od bazy ortonormalnej, często wykorzystywanym w zastosowaniach. Jeżeli $\{e_n\}$ jest rozpięciem dokładnym, to istnieje inne rozpięcie dokładne $\{f_n\}$ takie, że dla każdego $x \in E$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, f_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle f_n.$$

W przypadku rozpięcia dokładnego również mamy więc sytuację, gdzie każdy x można przedstawić jako kombinację elementów rozpięcia, i są jawne wzory na współczynniki tego rozwinięcia.

Przypomnijmy jeszcze kilka pojęć, z których będziemy korzystać. Jeżeli $H \subset E$ jest podprzestrzenią, to *dopełnieniem ortogonalnym* H nazywamy podprzestrzeń

$$H^{\perp} = \{x \in E : x \perp y \ \forall\ y \in H\},$$

($x \perp y$ oznacza $\langle x, y\rangle = 0$). Dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni jest zawsze domknięte, co wynika z ciągłości iloczynu skalarnego. Jeżeli $H \subset E$ jest podprzestrzenią domkniętą to istnieje *rzut prostopadły* na H, czyli przekształcenie liniowe $P : E \to H$ takie, że

$$\begin{aligned} Px &= x \qquad \forall\ x \in H, \\ Px &= 0 \qquad \forall\ x \in H^{\perp}. \end{aligned}$$

P przypisuje dowolnemu $x \in E$ najbliższy mu element podprzestrzeni H. Jeżeli w podprzestrzeni H mamy bazę o.n. $\{e_n\}$, to

$$Px = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle\ e_n.$$

Jeżeli G i H są dwoma podprzestrzeniami przestrzeni Hilberta E, to mówimy, że E jest *ortogonalną sumą prostą* podprzestrzeni G i H jeżeli każdy element $x \in E$ można jednoznacznie zapisać jako

$$x = x_1 + x_2, \qquad x_1 \in G,\ x_2 \in H,$$

oraz $G \perp H$ (czyli $x \perp y$ dla dowolnych $x \in G$ i $y \in H$). Piszemy wtedy

$$E = G \oplus H.$$

W takiej sytuacji podprzestrzenie G i H muszą być domknięte.

Uwagi. (i) Jeżeli $E = G \oplus H$ to żeby skonstruować bazę w E wystarczy osobno skonstruować bazy w G i w H. Ich suma, jako zbiorów, będzie bazą E. Jeżeli te bazy w G i H są ortonormalne, to ich suma też jest ortonormalna.
(ii) Jeżeli H jest domkniętą podprzestrzenią E, to

$$E = H \oplus H^{\perp}.$$