

Egzamin termin 0

20.06.2007

Zad. 1. Podaj definicję bazy topologicznej, bazy ortonormalnej, bazy Riesza i rozpięcia dokładnego w przestrzeni Hilberta. Udowodnij, że w przestrzeni $\mathbf{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbf{R}\}$ zbiór 3 wektorów

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

jest rozpięciem dokładnym.

Zad. 2. Podaj definicję analizy wielorozdzielczej w $L^2(\mathbf{R})$. Podaj definicję filtru dolnoprzepustowego analizy. Czy funkcja

$$\varphi(x) = \chi_{[0,3]}(x) = \begin{cases} 1 : & x \in [0, 3] \\ 0 : & x \notin [0, 3] \end{cases}$$

może być funkcją skalującą jakiejś analizy? Dlaczego nie?

Zad. 3. Podaj definicję splotu dwóch funkcji $f(x)$ i $g(x)$ na prostej $\mathbf{R}$. Oblicz spłot funkcji

$$f(x) = \chi_{[0,3]}(x) = \begin{cases} 1 : & x \in [0, 3] \\ 0 : & x \notin [0, 3], \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 : & x \geq 0 \\ 0 : & x < 0. \end{cases}$$

Wskazówka: Rozpatrz oddzielnie przypadki $x \leq 0$, $0 < x < 3$ i $x \geq 3$.

Zad. 4. Niech funkcja $\varphi(x)$ będzie funkcją skalującą analizy wielorozdzielczej Shannona, czyli

$$\hat{\varphi}(\xi) = \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi) = \begin{cases} 1 : & \xi \in [-\pi, \pi] \\ 0 : & \xi \notin [-\pi, \pi] \end{cases}$$

Podaj wzory na filtry dolno- i górnoprzepustowe tej analizy.