

Analiza matematyczna dla informatyków
Notatki z wykładu

Maciej Paluszyński

15 października 2007

0.1 Liczby rzeczywiste i zespolone

Liczby rzeczywiste

Nie będziemy szczegółowo zajmować się konstrukcją zbioru liczb rzeczywistych. Konstrukcja zbioru liczb rzeczywistych, określenie działań na liczbach i pokazanie wszystkich potrzebnych własności to temat bardzo ciekawy, i na pewno warto się nim zainteresować. Ale na tym wykładzie przypomnimy tylko najważniejsze fakty, i zakładamy, że generalnie liczby rzeczywiste wszyscy znają. Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamy $\mathbf{R}$, a liczbę rzeczywistą rozumiemy jako rozwinięcie dziesiętne (ciągi cyfr dziesiętnych), na przykład $123,357290\dots$. Rozwinięcie dziesiętne zawiera przecinek, jest skończone po lewej stronie i skończone lub nieskończone po prawej stronie. Rozwinięcia mogą mieć znak, wtedy nazywamy je liczbami ujemnymi. Wszyscy wiemy, jak dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić takie liczby, oraz znamy własności tych działań, na przykład łączność i rozdzielność. Przypomnijmy ważne fakty:

1. Jeżeli pewien układ cyfr po przecinku powtarza się okresowo, to ten układ cyfr zapisujemy w nawiasie: $0,03212512512\dots = 0,032(125)$.
2. Jeżeli od pewnego miejsca po przecinku w rozwinięciu są same zera, to nie piszemy ich, i takie rozwinięcie nazywamy skończonym $3,234000000\dots = 3,234(0) = 3,234$.
3. W zasadzie różne rozwinięcia dziesiętne oznaczają różne liczby. Są jednak wyjątki, i zdarza się, że 2 różne rozwinięcia dziesiętne oznaczają tę samą liczbę rzeczywistą. Wyjątek taki ma miejsce w sytuacji, gdy w rozwinięciu od pewnego miejsca są same 9. Takie rozwinięcie reprezentuje tę samą liczbę, co rozwinięcie, gdzie dziewiątki zastąpimy zerami, a pierwszą (od prawej) cyfrę mniejszą od 9 powiększamy o 1. Na przykład $0,09999\dots = 0,0(9) = 0,1$. Można to łatwo udowodnić, korzystając z własności działań (na przykład tego, że mnożenie przez 10 oznacza przesunięcie przecinka dziesiętnego w prawo o jedną pozycję). Niech $x = 0,0(9)$. Mamy wtedy

$$10 \cdot x = 0,(9) = 0,9 + 0,0(9) = 0,9 + x \Rightarrow 9 \cdot x = 0,9 \Rightarrow x = 0,1.$$

Liczby rzeczywiste, których rozwinięcia dziesiętne mają po przecinku same zera nazywamy liczbami całkowitymi, i oznaczamy $\mathbf{Z}$. Dodatnie liczby całkowite $1, 2, \dots$ (bez zera) nazywamy liczbami naturalnymi i oznaczamy $\mathbf{N}$.

Liczby wymierne

Liczby których rozwinięcia są skończone lub okresowe nazywamy liczbami wymiernymi. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy $\mathbf{Q}$. Liczby wymierne można zapisać jako ułamki $\frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in \mathbf{Z}$, oraz $n \neq 0$. Jeżeli $n \in \mathbf{N}$ oraz m i n nie mają wspólnego dzielnika, to przedstawienie liczby wymiernej x jako ułamka $\frac{m}{n}$ jest jednoznaczne, a taki ułamek nazywamy nieskracalnym. Każdą liczbę wymierną można przedstawić jako ułamek nieskracalny.

Przykłady: (a) $\frac{1}{7} = 0,1428571428 \dots = 0,(142857)$. Rozwinięcie dziesiętne otrzymujemy po prostu stosując „długie dzielenie”. Dzielać kolejno w pewnym momencie widzimy, że reszta powtarza się, i zauważamy w związku z tym okres.

(b) $0,123 = \frac{123}{1000}$. Jest to ułamek nieskracalny, gdyż licznik i mianownik nie mają wspólnych dzielników, a mianownik jest dodatni.

(c) $0,(a_1 a_2 \dots a_k) = \frac{a_1 a_2 \dots a_k}{99 \dots 9}$ (k – dziewiątek w mianowniku). Łatwo to udowodnić, wypisując i rozwiązując odpowiednie równanie na $x = 0,(a_1 \dots a_k)$.

(d) Przekształcimy następujące rozwinięcie dziesiętne na ułamek

$$\begin{aligned} 0,123(45) &= 0,123 + 0,000(45) = \frac{123}{1000} + \frac{0,(45)}{1000} \\ &= \frac{123}{1000} + \frac{1}{1000} \frac{45}{99} = \frac{99 \cdot 123 + 45}{99000} = \frac{12222}{99000}. \end{aligned}$$

Liczby niewymierne

Liczby rzeczywiste które nie są wymierne, czyli których rozwinięcia dziesiętne są nieskończone i nieokresowe nazywamy liczbami niewymiernymi.

Przykłady: (a) Napiszmy liczbę, w której rozwinięciu dziesiętnym coraz dłuższe ciągi zer przedzielane są jedynekami:

$$x = 0,101001000100001 \dots 10 \dots 010 \dots$$

Serie zer są coraz dłuższe, a więc rozwinięcie nie jest okresowe. Nie jest też skończone, bo zawiera nieskończenie wiele jedynek. x jest więc liczbą rzeczywistą niewymierną.

(b) Innym przykładem liczby niewymiernej jest $\sqrt[3]{100}$. Pokażemy, że $\sqrt[3]{100}$ nie jest liczbą wymierną. Rozumowanie to jest typowe, i można je zaadaptować do wielu przykładów. Załóżmy, że $\sqrt[3]{100}$ jest liczbą wymierną, i przedstawmy ją w postaci ułamka nieskracalnego

$$\sqrt[3]{100} = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad 100 = \frac{m^3}{n^3} \quad \Rightarrow \quad n^3 \cdot 100 = m^3.$$

5 dzieli lewą stronę ostatniej równości, więc musi dzielić prawą stronę. 5 jest liczbą pierwszą, więc jeżeli dzieli iloczyn liczb, to musi dzielić któryś z czynników (to jest własność liczb pierwszych). W takim razie 5 musi dzielić m , a w takim razie prawa strona, jako sześcián, dzieli się przez 125. W takim razie po lewej stronie równości n^3 musi się dzielić przez 5 (bo 100 dzieli się tylko przez 25), a więc znowuż, skoro 5 jest liczbą pierwszą, n musi dzielić się przez 5. Ułamek $\frac{m}{n}$ nie jest więc nieskracalny, co jest sprzeczne z założeniem. Założenie, że $\sqrt[3]{100}$ jest liczbą wymierną musi więc być fałszywe.

Uwagi: (i) Liczba pierwsza to liczba naturalna, która nie ma innych dzielników oprócz 1 i siebie samej. Liczby pierwsze mają następującą własność: jeżeli p jest pierwsza i $p|m \cdot n$ (p dzieli $m \cdot n$), to $p|m$ lub $p|n$.

(ii) Powyższe rozumowanie stanowi zastosowanie rozkładu liczby na czynniki pierwsze. Każdą liczbę naturalną można rozłożyć na iloczyn czynników, które są liczbami pierwszymi. Taki rozkład nazywamy rozkładem na czynniki pierwsze. Rozkład taki jest jednoznaczny. W równości

$$n^3 \cdot 100 = m^3$$

czynniki pierwsze n^3 i m^3 występują w kompletach po 3, a czynniki pierwsze 100, czyli 2 i 5 nie mają takich kompletów. Istnienie i jednoznaczność rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze to własność zbioru $\mathbf{N}$, której nie będziemy dowodzić, ale o której zawsze warto pamiętać. Jako ćwiczenie w którym rozkład na czynniki pierwsze może się przydać przytoczmy jeszcze następujące pytanie: ile zer końcowych ma liczba $(1000)!$ (1000 silnia)?

(iii) Pierwiastek występujący w poprzednim przykładzie, podobnie jak logarytm i potęgi występujące w następnym stanowią przykłady funkcji elementarnych. Zakładamy, że znamy funkcje elementarne, i nie będziemy zajmować się ich definicjami. W następnym rozdziale krótko przypomnimy najważniejsze fakty z nimi związane.

(c) $\log_2 3$. Będziemy rozumować jak w poprzednim przykładzie. Niech $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ będzie ułamkiem nieskracalnym

$$\log_2 3 = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad 2^{\frac{m}{n}} = 3 \quad \Rightarrow \quad 2^m = 3^n.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż lewa strona ostatniej równości zawiera jedynie dwójki jako swoje czynniki pierwsze, a prawa strona jedynie trójki. Założenie, że $\log_2 3 \in \mathbf{Q}$ musi więc być fałszywe.

(d) Suma, różnica, iloczyn i iloraz dwóch liczb wymiernych są wymierne (nie można dzielić przez zero). Suma, różnica, iloczyn i iloraz liczby wymiernej i niewymiernej są niewymierne (chyba że, w przypadku mnożenia i

dzielenia, liczba wymierna jest równa 0). Wynik działań na dwóch liczbach niewymiernych może być różny, wymierny lub niewymierny, w zależności od konkretnych wartości.

Interpretacja geometryczna

O liczbach rzeczywistych możemy myśleć jako o punktach prostej. Na prostej zaznaczamy miejsce zera i jedynki, strzałką oznaczamy kierunek wzrostu, i każdej liczbie rzeczywistej można przyporządkować, w sposób wzajemnie jednoznaczny punkt takiej prostej.

Rysunek 1: Prosta rzeczywista

Uporządkowanie zbioru $\mathbf{R}$

Jeżeli $x - y$ jest liczbą dodatnią, to piszemy $x > y$ („ x jest większe od y ”), jeżeli nieujemną, to piszemy $x \geq y$. Podobnie, jeżeli $x - y$ jest liczbą ujemną to piszemy $x < y$, jeżeli niedodatnią, to $x \leq y$. Widzimy więc, że dla $x, y \in \mathbf{R}$ mamy albo $x = y$, albo $x < y$ albo $x > y$. Mówimy, że zbiór $\mathbf{R}$ jest uporządkowany. Na prostej rzeczywistej $x > y$ jeżeli x jest bardziej na prawo od y – symbolizuje to strzałka w prawo – w prawo liczby rosną.

Symbole

$\forall$ czytamy „dla każdego”, $\exists$ czytamy „istnieje”, $\Leftrightarrow$ czytamy „wtedy i tylko wtedy”, $(\dots) \Rightarrow (\dots)$ czytamy „z $(\dots)$ wynika $(\dots)$ ”, $\in$ czytamy „należy do”, $\subset$ czytamy „jest podzbiorem”.

Aksjomat Archimedesesa

Liczby rzeczywiste mają następującą własność, która jest intuicyjnie zupełnie jasna: dla dowolnych $x, y > 0$ istnieje liczba naturalna n taka, że

$$nx > y.$$

Używając przytoczonych powyżej symboli aksjomat możemy zapisać jako

$$\forall x, y > 0 \exists n \in \mathbf{N} \ nx > y.$$

Z aksjomatu Archimedesesa wynika, na przykład, że istnieją liczby naturalne dowolnie duże (większe od każdej ustalonej liczby rzeczywistej). Ponieważ mnożenie przez -1 odwraca nierówności, więc z aksjomatu wynika też, że istnieją liczby całkowite dowolnie małe (mniejsze od każdej ustalonej liczby rzeczywistej). Zauważmy, że z aksjomatu wynika też, że istnieją liczby dodatnie dowolnie małe (dodatnie, ale mniejsze od dowolnej innej dodatniej). Będziemy używali wszystkich tych faktów, nie powołując się już bezpośrednio na aksjomat Archimedesesa.

Kresy

Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbf{R}$ jest ograniczony od góry, jeżeli

$$\exists c \forall x \in A \ x \leq c,$$

ograniczony od dołu, jeżeli

$$\exists d \forall x \in A \ x \geq d,$$

i ograniczony, jeżeli jest ograniczony od góry i od dołu jednocześnie. Stałe c i d w powyższych warunkach nazywamy odpowiednio ograniczeniem od góry i od dołu zbioru A . Zbiór liczb naturalnych jest ograniczony od dołu (ograniczeniem od dołu jest, na przykład liczba 1), ale nie jest ograniczony od góry (z aksjomatu Archimedesesa wynika, że nie da się znaleźć c , będącego ograniczeniem $\mathbf{N}$ od góry). Jeżeli zbiór $A \subset \mathbf{R}$ jest ograniczony od góry, to najmniejsze ograniczenie A od góry nazywamy kresem górnym A i oznaczamy $\sup A$ (supremum A). Jeżeli $A \subset \mathbf{R}$ jest ograniczony od dołu, to największe ograniczenie A od dołu nazywamy kresem dolnym A , i zapisujemy $\inf A$ (infimum A). Czyli, $s = \sup A$ jeżeli

- $\forall x \in A \ x \leq s,$
- $\forall u < s \exists x \in A \ x > u.$

Warunek (i) mówi, że A jest ograniczony od góry i s jest ograniczeniem od góry, a warunek (ii) mówi, że żadna liczba mniejsza od s nie jest ograniczeniem A od góry, czyli, że s jest najmniejszym ograniczeniem od góry. Podobnie możemy podsumować definicję kresu dolnego: $k = \inf A$ jeżeli

- $\forall x \in A \ x \geq k$,
- $\forall l > k \ \exists x \in A \ x < l$.

Aksjomat ciągłości

Każdy zbiór $A \subset \mathbf{R}$ ograniczony od góry ma kres górny. Równoważnie można sformułować tę własność dla kresów dolnych: każdy zbiór ograniczony od dołu ma kres dolny. Stwierdzenia te wyrażają pewną własność ciągłości zbioru liczb rzeczywistych – wypełniają całą prostą rzeczywistą, bez przerw.

Uwaga: Zbiór może zawierać swój kres lub nie Na przykład

$$\sup\{x : x < 1\} = \sup\{x : x \leq 1\} = 1,$$

przy czym pierwszy zbiór nie zawiera 1, a drugi zawiera.

Przykład: $A = \{\frac{m^2+n^2}{2mn} : m, n \in \mathbf{N}, m < n\}$. Zauważmy, że A nie jest ograniczony od góry. Istotnie, zbiór A zawiera wszystkie liczby postaci $\frac{m^2+1}{2m}$, $m \in \mathbf{N}$, $m > 1$. Każda taka liczba jest większa od $\frac{m}{2}$, a więc A zawiera liczby większe od dowolnej liczby naturalnej. Nie może więc być ograniczony od góry. Zauważmy, że jest ograniczony od dołu, i ograniczeniem od dołu jest 1. Wykorzystamy znaną nierówność:

$$2ab \leq a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{m^2 + n^2}{2mn} \geq 1 \quad \text{dla } m, n > 0.$$

Przekonamy się teraz, że 1 jest największym ograniczeniem A od dołu. Niech $c > 1$. Wtedy $\frac{1}{c-1}$ jest liczbą dodatnią, i z aksjomatu Archimedes'a wynika, że istnieje liczba naturalna m większa od $\frac{1}{c-1}$. Niech dodatkowo $m \geq 2$, co zawsze możemy założyć, ewentualnie powiększając m . Wtedy

$$2m(m-1) > m > \frac{1}{c-1} \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{2m(m-1)} < c.$$

Mamy więc

$$\frac{m^2 + (m-1)^2}{2m(m-1)} = \frac{m^2 + m^2 - 2m + 1}{2m(m-1)} = \frac{2m(m-1) + 1}{2m(m-1)} = 1 + \frac{1}{2m(m-1)} < c.$$

Zakładając, że $c > 1$ znaleźliśmy w zbiorze A element $\frac{m^2+(m-1)^2}{2m(m-1)}$ mniejszy od c . Tak więc żadne $c > 1$ nie jest ograniczeniem A od dołu, a więc 1 jest największym ograniczeniem A od dołu, czyli $\inf A = 1$. Przy okazji zauważmy, że $1 \notin A$: gdyby $1 \in A$, to istniałyby $m, n \in \mathbf{N}$, $n \neq m$, takie, że $m^2 + n^2 = 2mn$. Wiemy jednak, że taka równość jest równoważna $(m-n)^2 = 0$, czyli $m = n$.

Przedziały

Przedziały oznaczamy następująco: $(a, b) = \{x : a < x < b\}$, $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$, $(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$ oraz $[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$. W przypadku przedziałów (a, b) i $(a, b]$ dopuszczamy $a = -\infty$, a w przypadku przedziałów (a, b) i $[a, b)$ dopuszczamy $b = \infty$. Takie przedziały oznaczają wtedy odpowiednie półproste. Domyślnie rozumiemy, że $a \leq b$.

Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej definiujemy następująco

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jeżeli } x \geq 0, \\ -x & \text{jeżeli } x < 0. \end{cases}$$

Wartość bezwzględna ma następujące własności:

1. $|-x| = |x|$ oraz $-|x| \leq x \leq |x|$,
2. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (nierówność trójkąta),
3. $||x| - |y|| \leq |x - y|$,
4. $|x - y|$ reprezentuje odległość x od y na prostej rzeczywistej,
5. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ oraz $|x| = \sqrt{x^2}$,
6. $|x| \geq 0$ oraz $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Dla przykładu przeprowadzimy dowód nierówności trójkąta (2). Rozpatrzmy osobno dwa przypadki

(a) x i y mają ten sam znak $\pm$. Wtedy ich suma ma ten sam znak, a więc

$$|x + y| = \pm(x + y) = \pm x + \pm y = |x| + |y|.$$

W tym przypadku widzimy, że nierówność trójkąta jest równością.

(b) x i y mają przeciwne znaki. Możemy założyć, że $x \leq 0 \leq y$, w przeciwnym przypadku zamieniając miejscami x i y . Jeżeli $x + y \geq 0$ to

$$|x + y| = x + y \leq -x + y = |x| + |y|,$$

a jeżeli $x + y \leq 0$ to

$$|x + y| = -(x + y) = -x - y \leq -x + y = |x| + |y|.$$

W tym przypadku, jeżeli żadna z liczb x, y nie jest zerem, to nierówność trójkąta jest ostra.

Część całkowita i ułamkowa

Część całkowita x to największa liczba całkowita nie większa od x . Część całkowitą x oznaczamy $[x]$. Część ułamkowa x to $\{x\} = x - [x]$. Część całkowita ma więc następujące własności

- $[x] \in \mathbf{Z}$,
- $[x] \leq x < x + 1$ czyli $x - 1 < [x] \leq x$,
- $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbf{Z}$.

Przykłady: $[1, 5] = 1$, $[-1, 5] = -1$, $\{-1, 5\} = 0, 5$.

Rysunek 2: Część całkowita i część ułamkowa

Gęstość liczb wymiernych i niewymiernych w $\mathbf{R}$

W każdym przedziale otwartym (a, b) leży liczba wymierna i niewymierna. Niech (a, b) będzie dowolnym przedziałem ($a < b$). Udowodnimy, że w (a, b) musi leżeć liczba wymierna, niewymierna pozostaje jako ćwiczenie. $\frac{1}{b-a} > 0$, więc z aksjomatu Archimedes’a istnieje $n \in \mathbf{N}$ taka, że $n > \frac{1}{b-a}$ czyli $\frac{1}{n} < (b-a)$. Rozważmy zbiór liczb postaci

$$\left\{ \frac{k}{n} : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Któraś z liczb z powyższego zbioru musi wpasnąć do przedziału (a, b) . Niech

$$k_0 = \sup \left\{ k \in \mathbf{Z} : \frac{k}{n} \leq a \right\},$$

(łatwo uzasadnić, że powyższe supremum istnieje, i że należy do tego zbioru). Zauważmy, że $\frac{k_0+1}{n} > a$ oraz skoro $\frac{k_0}{n} \leq a$, a $\frac{1}{n} < (b-a)$, to $\frac{k_0+1}{n} < a+(b-a) = b$. Tak więc $\frac{k_0+1}{n} \in (a, b)$ i jest oczywiście liczbą wymierną.

Zasada indukcji

Zbiór liczb naturalnych ma następującą własność: Każdy jego niepusty podzbiór posiada element najmniejszy. Z tej własności wynika następująca zasada indukcji. Niech $T(n)$, $n \geq n_0$ będzie pewnym ciągiem twierdzeń. Często w zastosowaniach są to równości bądź nierówności, w których występuje liczba naturalna n . Niech:

1. $T(n_0)$ będzie prawdziwe (punkt startowy indukcji),
2. $\forall n \geq n_0$ zachodzi wynikanie ($T(n)$ – prawdziwe) $\Rightarrow$ ($T(n+1)$ – prawdziwe) (krok indukcyjny).

Wtedy wszystkie twierdzenia $T(n)$, $n \geq n_0$ są prawdziwe. Zasada indukcji jest intuicyjnie oczywista, i można ją łatwo udowodnić: Jeżeli nie wszystkie twierdzenia $T(n)$, $n \geq n_0$ są prawdziwe, to niech $A \subset \mathbf{N}$ będzie zbiorem tych $n \geq n_0$, dla których $T(n)$ nie jest prawdziwe. A ma element najmniejszy który oznaczmy przez $\tilde{n}$. Zauważmy, że z warunku (1) wynika, że $\tilde{n} > n_0$. Mamy więc $T(\tilde{n})$ fałszywe (bo $\tilde{n} \in A$), ale $T(\tilde{n}-1)$ prawdziwe, gdyż $\tilde{n}-1 \notin A$. Ale to przeczy warunkowi (2), gdyż z prawdziwości $T(\tilde{n}-1)$ wynika prawdziwość $T(\tilde{n})$.

Przykład: Pokażemy, że $\forall n \in \mathbf{N}$ prawdziwe jest twierdzenie $T(n)$, które

w tym przypadku jest nierównością $10n < 2^n + 25$. Przeprowadzimy krok indukcyjny, czyli dowód (2). Załóżmy więc

$$10n < 2^n + 25,$$

i spróbujmy, przy wykorzystaniu powyższego udowodnić

$$10(n+1) < 2^{n+1} + 25. \quad (0.1.1)$$

Mamy więc

$$10(n+1) = 10n + 10 < 2^n + 25 + 10. \quad (0.1.2)$$

Żeby dokończyć dowód, i dojść do (0.1.1) potrzebujemy nierówność $10 \leq 2^n$, która, niestety, jest prawdziwa tylko dla $n \geq 4$. Załóżmy więc, że $n \geq 4$, i dokończmy (0.1.2):

$$2^n + 25 + 10 < 2^n + 2^n + 25 = 2^{n+1} + 25,$$

czyli mamy zrobiony krok indukcyjny, dla dowolnego $n \geq 4$. Oznacza to, że zasadę indukcji będziemy mogli zastosować tylko do udowodnienia nierówności dla $n \geq 4$. Co z nierównościami dla $n = 1, 2, 3$? Tych kilka przypadków sprawdzimy ręcznie, niezależnie od indukcji. Dodatkowo został jeszcze przypadek $n = n_0 = 4$, który jest punktem startowym dla indukcji $n \geq 4$. Musimy więc sprawdzić bezpośrednio:

$n = 1$: $10 < 2 + 25$ prawdziwe,
 $n = 2$: $20 < 2^2 + 25$ prawdziwe,
 $n = 3$: $30 < 2^3 + 25$ prawdziwe, oraz w końcu
 $n = 4$: $40 < 2^4 + 25 = 41$ też prawdziwe.

Skorzystaliśmy z zasady indukcji, żeby przeprowadzić dowód dla $n \geq 4$, a pozostałe przypadki sprawdziliśmy bezpośrednio. To jest typowy przykład: próbując wykonać krok indukcyjny znajdujemy ograniczenie na n przy którym krok indukcyjny jest możliwy. Do tego ograniczenia dopasowujemy punkt startowy indukcji, a pozostałe przypadki sprawdzamy „ręcznie”.

Liczby zespolone

Zbiór liczb zespolonych $\mathbf{C}$ to zbiór symboli $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbf{R}$. Symbole dodajemy i mnożymy zgodnie ze wzorami

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i, \\ (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i. \end{aligned}$$

Liczby rzeczywiste traktujemy jako podzbiór liczb zespolonych $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ poprzez identyfikację $x \sim x + 0i$. Zauważmy, że ta identyfikacja zachowuje działania: na przykład $(a_1 + 0i) + (a_2 + 0i) = (a_1 + a_2) + 0i$. Zauważmy też że $(i)^2 = (0 + ii)^2 = -1 + 0i = -1$. Przy powyższej identyfikacji $i^2 = -1$, a liczby zespolone traktujemy jako rozszerzenie zbioru liczb rzeczywistych. Zbiór $\mathbf{C}$ ma zaletę: każdy wielomian o współczynnikach zespolonych rozkłada się na iloczyn czynników liniowych. Dzięki temu liczby zespolone stanowią ważne narzędzie i dla matematyków i dla inżynierów (także dla informatyków :-)). Przypomnijmy następujące pojęcia:

- $\Re(a + bi) =$ część rzeczywista $(a + bi) = a$,
- $\Im(a + bi) =$ część urojona $(a + bi) = b$,
- $\overline{a + bi} =$ sprzężenie $(a + bi) = a - bi$.

Mamy następujące własności

1. $\overline{(\bar{z})} = z, \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w},$
2. $\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i},$
3. $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbf{R},$
4. $z \cdot \bar{z} = \Re(z)^2 + \Im(z)^2$ – nieujemna liczba rzeczywista.

Moduł

Moduł liczby zespolonej definiujemy jako

$$|z| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}.$$

Przykłady: $|-1 + 2i| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $|i| = |0 + 1i| = 1$.

Moduł liczby zespolonej jest odpowiednikiem wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej. Mamy następujące własności modułu

- $|z| \geq 0$ i $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,
- $|z| = |-z| = |\bar{z}|$, $|\alpha z| = |\alpha| \cdot |z|$ dla $\alpha \in \mathbf{R}$,
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ (nierówność trójkąta),
- $|z - w| \geq |z| - |w|$.

Interpretacja geometryczna

Liczby zespolone, czyli wyrażenia postaci $a + bi$ można utożsamiać z punktami płaszczyzny $\mathbf{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$. Przy tej interpretacji dodawanie

Rysunek 3: Płaszczyzna liczb zespolonych

jest zgodne z dodawaniem wektorów, a mnożenie przez liczbę rzeczywistą z mnożeniem przez skalar. Sprzężenie jest odbiciem względem osi poziomej, a moduł oznacza euklidesową odległość od początku układu współrzędnych.

Rysunek 4: Moduł i sprzężenie liczby zespolonej

Postać trygonometryczna

Liczbę zespoloną $a + bi$ można zapisać w tak zwanej postaci trygonometrycznej. W tej postaci liczby łatwo mnoży się, podnosi do potęgi, wyciąga

pierwiastki. Niech $z = a + bi \neq 0$

$$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right).$$

Można znaleźć taką liczbę $\varphi \in [0, 2\pi)$, że

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Możemy to podstawić do wzoru na z , i otrzymamy postać trygonometryczną liczby zespolonej

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Używając interpretacji geometrycznej zapis liczby zespolonej $a + bi$ w postaci trygonometrycznej $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ odpowiada przedstawieniu punktu (a, b) na płaszczyźnie we współrzędnych biegunowych (r, φ) .

Rysunek 5: Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Liczbę φ nazywamy argumentem z . Ponieważ funkcje $\sin$ i $\cos$ są okresowe o okresie 2π , więc istnieje nieskończenie wiele argumentów każdej liczby z , różniących się dokładnie o całkowitą wielokrotność 2π . Ten spośród argumentów, który leży w przedziale $[0, 2\pi)$ (jest dokładnie jeden taki) nazywamy argumentem głównym z .

Przykład: $z = 1 - i = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}} i)$. Szukamy $\varphi \in [0, 2\pi)$, takiej, że

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Łatwo zauważyć, że $\varphi = \frac{7}{4}\pi$.

Rysunek 6: Współrzędne biegunowe

Uwagi: (i) Dwie liczby zespolone są równe, jeżeli ich części rzeczywiste i urojone są równe. W przypadku zapisu liczb w postaci trygonometrycznej mamy

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

wtedy gdy $r_1 = r_2$ oraz $\varphi_1 - \varphi_2$ jest całkowitą wielokrotnością 2π ,

(ii) $r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ (moduły mnożymy, argumenty dodajemy),

(iii) $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$,

(iv) pierwiastkiem liczby zespolonej z stopnia $n \in \mathbf{N}$ nazywamy liczbę zespoloną w taką, że $w^n = z$. Posługując się postacią trygonometryczną pokażemy, że każda liczba zespolona $z \neq 0$ ma dokładnie n różnych pierwiastków stopnia n . Niech $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ (przy czym φ – argument główny z), $n \in \mathbf{N}$, i niech

$$w_l = \sqrt[n]{r}(\cos \psi_l + i \sin \psi_l), \quad \psi_l = \frac{\varphi + 2l\pi}{n} \quad l = 0, 1, \dots, n-1.$$

Zauważmy, że każda z liczb w_l jest pierwiastkiem stopnia n z z , oraz wszystkie są różne: $\psi_k - \psi_l = \frac{k-l}{n} 2\pi$, przy czym $-1 < \frac{k-l}{n} < 1$. Jedyną liczbą całkowitą spełniającą obie nierówności jest zero, a więc jeżeli $w_k = w_l$ to $k = l$. Mamy więc n różnych pierwiastków. Więcej nie może być, gdyż każdy pierwiastek stopnia n z liczby z jest pierwiastkiem wielomianu stopnia n $P(w) = w^n - z$. Wiemy, że wielomiany stopnia n mają najwyżej n różnych pierwiastków.

Przykład: Obliczmy następujące pierwiastki: $\sqrt[4]{1-i} = \sqrt[8]{2}(\cos \psi_l + i \sin \psi_l)$, gdzie $\psi_l = \frac{\frac{7}{4}\pi + 2l\pi}{4} = \frac{(7+8l\pi)}{16}$, $l = 0, 1, 2, 3$.

0.2 Funkcje

Przypomnimy najważniejsze potrzebne nam pojęcia dotyczące funkcji. Niech $A \subset \mathbf{R}$ będzie podzbiorem liczb rzeczywistych. Funkcją f określoną na A o wartościach rzeczywistych nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi A jakiejś liczby rzeczywistej. Funkcja jest o wartościach zespolonych, jeżeli każdemu punktowi A przyporządkowana jest liczba zespolona. Piszemy

$$f : M \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{lub} \quad f : M \rightarrow \mathbf{C}.$$

Zbiór A nazywa się dziedziną funkcji f i często oznaczany jest przez D_f . Zbiór

$$\{y : \exists x \in D_f \ f(x) = y\}$$

nazywa się obrazem f , lub zbiorem wartości f .

Określenie funkcji (czyli przyporządkowanie wartości elementom dziedziny) najczęściej ma postać wzoru. Często nie pisze się dziedziny D_f . Wtedy domyślnie funkcja jest określona na największym zbiorze, na którym wzór definiujący funkcję ma sens. Taki maksymalny zbiór nazywamy dziedziną naturalną f .

Funkcje elementarne

(a) Wielomiany to funkcje postaci $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. Współczynniki mogą być rzeczywiste lub zespolone. $D_f = \mathbf{R}$. Wielomian stopnia n ma nie więcej niż n pierwiastków. Wielomian o współczynnikach rzeczywistych stopnia nieparzystego ma co najmniej 1 pierwiastek rzeczywisty, natomiast stopnia parzystego może wogóle nie mieć pierwiastków rzeczywistych. Dla dużych $|x|$ wielomian zachowuje się podobnie do swojego wyrazu wiodącego a_nx^n .

(b) Funkcje wymierne to funkcje postaci $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie P i Q są wielomianami. $D_f = \{x : Q(x) \neq 0\}$.

(c) Funkcja potęgowa $f(x) = x^\alpha$. D_f zależy od α . Jeżeli $\alpha = \frac{m}{n}$ jest wymierna to $x^\alpha = \sqrt[n]{x^m}$. $x^0 = 1$ dla każdego x , oraz dla $m < 0$ mamy $x^m = \frac{1}{x^{-m}}$. Jeżeli α jest niewymierna, to

$$x^\alpha = \sup\{x^q : q \in \mathbf{Q}, q < \alpha\}.$$

Poza szczególnymi przypadkami α (na przykład $\alpha \in \mathbf{N}$) mamy $D_f = \mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$.

(d) Funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$, $a > 0$. $D_f = \mathbf{R}$.

(e) Logarytm $f(x) = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$. $D_f = \mathbf{R}^+$. Logarytm jest funkcją odwrotną do wykładniczej, czyli $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$.

Mamy następujące własności potęg i logarytmów (w każdym przypadku musimy pamiętać o ewentualnych ograniczeniach na zakres zmiennych): $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$, $(x \cdot y)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$, $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$, $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

(f) Funkcje trygonometryczne. Na okręgu jednostkowym odmierzymy od punktu $(1, 0)$ odległość φ przeciwie do ruchu wskazówek zegara jeżeli $\varphi > 0$ i zgodnie z ruchem wskazówek zegara jeżeli $\varphi < 0$. Daje nam to pewien punkt na okręgu jednostkowym (x, y) . Współrzędne tego punktu nazywamy funkcjami $\cos$ i $\sin$ odpowiednio:

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi.$$

Funkcje $\cos$ i $\sin$ są okresowe o okresie 2π , to znaczy obie spełniają $f(x+2\pi) = f(x)$. Mamy też $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, oraz równości

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi,$$

$$\sin(\varphi + \psi) = \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi.$$

Działania na funkcjach

f jest rosnąca (lub ściśle rosnąca), jeżeli $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Mówimy, że f jest słabo rosnąca (lub niemalejąca, jeżeli $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Podobnie f jest malejąca (ściśle malejąca) jeżeli $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ oraz słabo malejąca (nierosnąca) jeżeli $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$. Innymi słowy funkcję rosnącą można zastosować do stron nierówności, i nierówność się zachowa, a w przypadku funkcji malejącej nierówność zamieni się na przeciwną. Mówimy, że f jest monotoniczna, jeżeli jest albo rosnąca, albo malejąca, i to samo z przymiotnikami „ściśle” lub „słabo”. Funkcje mogą być monotoniczne kawałkami. Na przykład, $f(x) = x^3$ jest ściśle rosnąca, a więc nierówności możemy podnosić stronami do 3 potęgi. Natomiast $f(x) = x^2$ jest kawałkami monotoniczna — rosnąca dla $x \geq 0$ i malejąca dla $x \leq 0$. Nierówności możemy podnosić stronami do kwadratu, pod warunkiem, że dotyczą liczb nieujemnych.

0.2.1 Wykres

Jeżeli f jest funkcją o wartościach rzeczywistych, to wykres f to następujący podzbiór płaszczyzny

$$\{(x, y) : x \in D_f, y = f(x)\} \subset \mathbf{R}^2.$$