

Wykład z analizy

LISTA 1.

LICZBY RZECZYWISTE

1. Znaleźć rozwinięcia dziesiętne ułamków postaci $\frac{n}{k}$ dla $n = 1, 2, 3$ oraz $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13$.
Od czego zależy długość okresu? Podać przykład rozwinięcia o okresie długości 10.
2. Pokazać, że rozwinięcie

$$x = 0,1234567891011121314151617181920212223$$

złożone z kolejnych liczb naturalnych, nie jest okresowe.

Wskazówka: Uzasadnić, że w powyższej liczbie są miejsca, w których występują po kolei dwa zera, trzy zera, cztery zera, itd., czyli że istnieją dowolnie długie „odcinki” złożone z samych zer.

3. Przeprowadzić dowód niewymierności dla liczb postaci $\sqrt{k}$ gdzie $k = 56, 35, 24$ oraz $\sqrt[n]{k}$ dla $n = 5, k = 7, 8, 10$.
4. Udowodnić że zbiór liczb całkowitych nie jest ograniczony ani z góry ani z dołu.
Wskazówka: Wykorzystać aksjomat Archimedesesa.
5. Pokazać, że żadna liczba wymierna nie jest najmniejszym ograniczeniem od góry zbioru tych liczb wymiernych x , które spełniają warunek $x^3 < 10$.
Uwaga: Tutaj pracujemy tylko z liczbami wymiernymi!
6. Korzystając z definicji znaleźć kresy górny i dolny odcinka otwartego $(1, 2)$.
7. Znaleźć kresy górny i dolny zbioru $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}; n, k \in \mathbf{N}\}$.
8. Znaleźć kresy górny i dolny zbioru $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ złożonego z odwrotności kolejnych liczb naturalnych.
9. Udowodnić, że liczba $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ jest niewymierna.
10. Udowodnić, że liczba $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{6}$ jest niewymierna.
11. Bez pomocy kalkulatora znaleźć części całkowite liczb postaci $(\sqrt[3]{4})^n$ dla $n = 1, 2, \dots, 15$.
Wskazówka: Wypisać sześciany kolejnych liczb naturalnych oraz kolejne potęgi czwórki i porównać je ze sobą
12. Udowodnić, że każdym przedziale otwartym (a, b) istnieje liczba niewymierna.
13. Udowodnić, że dowolne liczby rzeczywiste x, y spełniają nierówność $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
14. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ prawdziwa jest nierówność

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

15. Znaleźć kresy górny i dolny zbioru $\{x + y : x, y > 0, [x] + [y] = 3\}$.
16. Wykazać, że

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}\{x + y + |x - y|\},$$

gdzie $\max\{x, y\}$ oznacza większą z liczb x i y .

17. Niech a, b będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Znaleźć kresy zbioru liczb postaci

$$a \cos(x) + b \sin(x),$$

gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą.

18. Pokazać, że $|a - b - c| \geq |a| - |b| - |c|$
19. Niech $x = 1,0234107\dots$, $y = 1,0235106\dots$. Czy jest prawdą, że
 - (a) $1,02 < x \leq 1,03$?
 - (b) $x + y > 2,04692$?
 - (c) $x < y$?
20. Opisać geometrycznie zbiory (a) $\{x : |x - 3| < 2\}$, (b) $\{x : |x - 1| < |x + 1|\}$ (c) $\{x : |a + 1| < |x - a| < |x + 1|\}$.