

Wykład z analizy

LISTA 2.

LICZBY ZESPOLONE

1. Znaleźć potęgi naturalne liczby i , czyli wyznaczyć liczby zespolone postaci i^n dla wszystkich liczb naturalnych n .
2. Dla danych liczb zespolonych $z, w \in \mathbf{C}$ wyznaczyć: $\Re(z+w)$, $\Im(z+w)$, $\Re(zw)$, $\Im(zw)$, w zależności od $\Re(z)$, $\Im(z)$, $\Re(w)$ oraz $\Im(w)$.
3. Wyznaczyć $\Re(1/z)$ w zależności od $\Re(z)$ i $\Im(z)$.
4. Udowodnić następujące własności sprzężenia liczb zespolonych: (i) $\overline{\overline{z}} = z$; (ii) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$; (iii) $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$; (iv) $\Re(z) = (z + \overline{z})/2$, $\Im(z) = (z - \overline{z})/2i$.
5. Znaleźć moduły liczb zespolonych $z = -2 - 3i$ oraz $z = 1 - i$.
6. Udowodnić, że dla dowolnych liczb $z, w \in \mathbf{C}$ mamy następujące własności: (i) $|z| \geq 0$ i $|z| = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $z = 0$; (ii) $|zw| = |z||w|$; (iii) $|z - w| \geq ||z| - |w||$.
7. Wyznaczyć geometrycznie (naskicować na płaszczyźnie) zbiór $\{z \in \mathbf{C} : |z - 1| = 1\}$.
8. Naskicować na płaszczyźnie zbiór liczb $z \in \mathbf{C}$ spełniających nierówność $|z + 4 - 2i| \leq 3$.
9. Wyznaczyć postać trygonometryczną następujących liczb zespolonych: $-6 + 6i$, $2i$, $1 + i$, $\sqrt{6} + i$.
10. Wyznaczyć postać trygonometryczną liczb zespolonych o module 1.
11. Udowodnić, że dla $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ oraz $z = s(\cos \psi + i \sin \psi)$ jest

$$z \cdot w = r \cdot s (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)).$$

12. Udowodnić, że dla $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$ istnieje $w \in \mathbf{C}$ do niej odwrotna, to znaczy taka, że $z \cdot w = 1$.
13. Udowodnić, że dla dowolnej $n \in \mathbf{N}$ i dowolnej $z \in \mathbf{C}$, o postaci trygonometrycznej $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ mamy wzór
$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$
14. Wyznaczyć wszystkie różne pierwiastki stopnia 3 oraz stopnia 4 z liczb 1, -1, $1 + i$ oraz $2 - 2i$ (w postaci trygonometrycznej oraz zwykłej). Podać ich położenie na płaszczyźnie.
15. Niech $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ będą różnymi pierwiastkami stopnia n z liczby 1. Ile wynosi suma $\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n$? A jaka jest suma wszystkich n różnych pierwiastków stopnia n z liczby i ?
16. Udowodnić równość $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.
17. Niech $a, b, c \in \mathbf{C}$ będą dowolne, i niech $d \in \mathbf{C}$ będzie jednym z pierwiastków $\sqrt{b^2 - 4ac}$. Udowodnić, że pierwiastki równania $az^2 + bz + c = 0$ są postaci

$$z = \frac{-b \pm d}{2a}.$$