

Wykład z analizy

LISTA 5.

SZEREGI

1. Obliczyć sumy częściowe $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, a następnie znaleźć $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$: $a_k = \frac{1}{a_k}$, $a_k = \frac{2^k + 5^k}{10^k}$.
2. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 2.
3. Rozstrzygnąć, czy następujące szeregi są zbieżne:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2+1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-1}{n^3+6n^2+8n+47}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n n!} \quad (k!! \text{ oznacza iloczyn wszystkich liczb naturalnych nie większych od } k \text{ o tej samej}$$

parzystości); $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^3}}{3^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\sqrt{n+1}}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n-n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{\sqrt[10]{n!}};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 + \arctan n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2^n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \pi}{n^{\pi + e}}.$$
4. Które z następujących szeregów są zbieżne, a które są zbieżne absolutnie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 3^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n+1}{n};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+4)(n+9)}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{10^n}}{3^{2^n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot (-5)^n}{n^n \cdot 2^n};$$

$$1 - 1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots + 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \dots - \frac{1}{k} + \dots \quad (k \text{ razy});$$

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} - \dots - \frac{1}{k^2} + \dots \quad (k \text{ razy});$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^3}{2^n}; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n^2}}{n!}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 77n}{n^2};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 17}{3^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!+1}}{n!}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{(n+3)^{1/4}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} (-1)^n;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\sqrt{4^n+3^n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5\sqrt{n+27}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2n}{n}\right)}{n!};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{4^{\binom{n}{2}}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n};$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(\log n)^{\log n} (-1)^n}{n^{\log \log n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\arctan n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) (-1)^n.$$