

ANALIZA MATEMATYCZNA
LISTA ZADAŃ 8

- (1) Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Korzystając z definicji obliczyć $f'(8)$.
- (2) Niech $f(x) = x^5$. Korzystając z definicji wyprowadzić wzór na $f'(x)$.
- (3) Niech $n \in \mathbb{N}$. Dobrać stałe a, b, c tak, aby funkcja

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } |x| \geq 1/n, \\ ax^2 + bx + c & \text{dla } |x| < 1/n \end{cases}$$

była różniczkowalna. Obliczyć f'_n . Naszkicować wykres funkcji f_n oraz wykres pochodnej.

- (4) Obliczyć pochodną następujących funkcji. Podać w jakim zbiorze istnieje pochodna:

$$\begin{aligned} & 3x^2 - 5x + 1; \quad (\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right); \quad \frac{1 - x^3}{1 + x^3}; \\ & (1 + \sqrt{x})(1 + x^{1/3})(1 + x^{1/4}); \quad (x^2 + 1)^4; \quad \frac{x + 1}{x - 1}; \\ & \frac{x}{x^2 + 1}; \quad (1 + 2x)^{30}; \quad \left(\frac{1}{1 + x^2} \right)^{1/3}; \\ & \frac{1}{\sqrt{1 - x^4 - x^8}}; \quad 2^{x+3}; \quad x10^x; \\ & \frac{x}{e^x}; \quad x^2(x + 1)e^x; \quad e^x \log x; \\ & \frac{\log x}{e^x}; \quad e^{x^2}; \quad x^{10} \log x. \\ & e^{e^x}; \quad \log \log x; \quad \log_{10}(x - 1); \\ & 10^{2x-3}; \quad 2^{3x}; \quad \log_2 |\log_3(\log_5 x)|; \\ & e^{\sqrt{\log x}}; \quad x^{x^2}; \quad x^{x^x}; \\ & x^{\sqrt{x}}; \quad (\log x)^x; \quad e^{-x^2} \log x; \\ & \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{10}; \quad x^5(x^6 - 8)^{1/3}; \quad e^{2x+3} \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \log \frac{1}{1+x}; \quad \frac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}}; \quad |x|^3; \\
& \operatorname{sgn} x; \quad 0 \text{ dla } x < 0, x^2 \text{ dla } x \geq 0; \\
& e^{-|x|}; \quad \sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}; \quad \{x\}; \\
& x \text{ dla } x < 0, x^2 \text{ dla } x \geq 0; \quad \operatorname{sgn}(x^5 - x^3); \\
& \frac{\pi^{10}}{\pi - e}; \quad e^x \text{ dla } x < 0, 1+x \text{ dla } x \geq 0; \\
& x^7 + e^2; \quad (x+e)^{20}; \quad e^e.
\end{aligned}$$

- (5) Potrzebna jest kadź w kształcie walca, otwarta od góry, której dno i bok wykonane są z tego samego materiału. Kadź ma mieć pojemność 257 hektolitrów. Jaki powinien być stosunek średnicy dna do wysokości kadzi, aby do jej wykonania zużyć jak najmniej materiału?

- (6) Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji określonej podanym wzorem w podanym przedziale:

$$\begin{aligned}
& x^2 + 2x + 21, \quad [-2, 7]; \quad |x^2 - 1| + 3x, \quad [-2, 2]; \\
& |x + 1| + x^2, \quad [-10, 10]; \quad |10x - 1| + x^3, \quad [0, 1]; \\
& \log x - \frac{x}{10}, \quad [1, e^3]; \quad |\sin x| + \frac{x}{2}, \quad [0, 2\pi]; \\
& x^{1/x}, \quad [2, 4]; \quad 3 \sin x + \sin 3x, \quad [0, 2\pi].
\end{aligned}$$

- (7) Obliczyć granice:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}; \\
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - x^2 - 2}{x \sin x - x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}; \\
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{e^x} - e}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}; \\
& \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x - x + 1}{(x - 1)^2}; \quad \lim_{x \rightarrow e} \frac{\log \log x}{x - e}; \\
& \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^x}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^x - 4}{x - 2}.
\end{aligned}$$