

ANALIZA MATEMATYCZNA
LISTA ZADAŃ 13

- (1) Oblicz pole figury ograniczonej krzywymi:
- (a) $y = x^2$ i $y = 2x + 5$; (b) $y = e^x$ i prostą przechodzącą przez punkty $(0, 1)$ i $(1, e)$;
- (c) $y = \sin x$ i $y = \frac{2x}{\pi}$; (d) $y = x^4$ i $y = x^3$;
- (e) $y = \frac{1}{x}$ i $y = \frac{5}{2} - x$; (f) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^3}$ i $x = 2$.
- (2) Oblicz długość łuku krzywej $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ dla podanych $f(x)$, a i b :
- (a) x , 1, 2; (b) $2x - 3$, -7 , 12; (c) e^x , 1, 2;
- (d) $\sqrt{x^3}$, 6, 10; (e) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 0, 1.
- (3) Dla danych $f(x)$, a i b oblicz pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ wokół osi OX :
- (a) x^3 , 0, 5; (b) e^{-x} , 0, 10; (c) $\sqrt{x}$, 0, 4;
- (d) $\sin x$, 0, π ; (e) $\cos 7x$, 0, 2π .
- (4) Dla danych $f(x)$, a i b oblicz objętość bryły powstałej przez obrót obszaru $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$ wokół osi OX :
- (a) $\sqrt{x}$, 0, 1; (b) x , 1, 5; (c) x^7 , 0, 10;
- (d) e^x , -3 , 0; (e) $\sin x$, 0, $\frac{3\pi}{2}$.
- (5) Obliczyć długość łuku krzywej $y = \sqrt{(x+5)^3}$, $0 \leq x \leq 8$.
- (6) Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru $0 \leq y \leq xe^x$, $0 \leq x \leq 1$ wokół osi OX .
- (7) Obliczyć długość łuku krzywej $y = \log x$, $1 \leq x \leq \sqrt{3}$.
- (8) Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru $\arctan x \leq y \leq \sqrt{\arctan^2 x + 1 + \sin x}$, $0 \leq x \leq 2\pi$ wokół osi OX .

(9) Od pomarańczy o grubej skórce odcięto końce, tak, że ukazał się miąższ. Pomarańczę następnie pokrojono w równe plastry. Pokazać, że każdy plaster zawiera tyle samo skórki.

(10) Zbadać zbieżność całek niewłaściwych, obliczyć te, które są zbieżne:

$$\begin{array}{llll}
 \text{(a)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}; & \text{(b)} \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}; & \text{(c)} \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}; & \text{(d)} \int_{-1}^1 \frac{x-1}{x^2-1} dx; \\
 \text{(e)} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log x}; & \text{(f)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}}; & \text{(g)} \int_0^{\infty} \cos x dx; & \\
 \text{(h)} \int_1^{\infty} x^{\frac{1}{x}} dx; & \text{(i)} \int_{-\infty}^{\infty} e^x dx; & \text{(j)} \int_0^1 e^{\frac{1}{x}} dx; & \\
 \text{(k)} \int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} dx; & \text{(l)} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log^2 x}; & \text{(m)} \int_0^{\infty} x^3 \sin(x^4) dx. &
 \end{array}$$