

Analiza matematyczna dla informatyków
Notatki z wykładu

Maciej Paluszyński

3 lutego 2008

1 Liczby rzeczywiste i zespolone

Liczby rzeczywiste

Nie będziemy szczegółowo zajmować się konstrukcją zbioru liczb rzeczywistych. Konstrukcja zbioru liczb rzeczywistych, określenie działań na liczbach i pokazanie wszystkich potrzebnych własności to temat bardzo ciekawy, i na pewno warto się nim zainteresować. Ale na tym wykładzie przypomnimy tylko najważniejsze fakty, i zakładamy, że generalnie liczby rzeczywiste wszyscy znają. Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamy $\mathbf{R}$, a liczbę rzeczywistą rozumiemy jako rozwinięcie dziesiętne (ciągi cyfr dziesiętnych), na przykład $123,357290\dots$. Rozwinięcie dziesiętne zawiera przecinek, jest skończone po lewej stronie i skończone lub nieskończone po prawej stronie. Rozwinięcia mogą mieć znak, wtedy nazywamy je liczbami ujemnymi. Wszyscy wiemy, jak dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić takie liczby, oraz znamy własności tych działań, na przykład łączność i rozdzielność. Przypomnijmy ważne fakty:

1. Jeżeli pewien układ cyfr po przecinku powtarza się okresowo, to ten układ cyfr zapisujemy w nawiasie: $0,03212512512\dots = 0,032(125)$.
2. Jeżeli od pewnego miejsca po przecinku w rozwinięciu są same zera, to nie piszemy ich, i takie rozwinięcie nazywamy skończonym $3,234000000\dots = 3,234(0) = 3,234$.
3. W zasadzie różne rozwinięcia dziesiętne oznaczają różne liczby. Są jednak wyjątki, i zdarza się, że 2 różne rozwinięcia dziesiętne oznaczają tę samą liczbę rzeczywistą. Wyjątek taki ma miejsce w sytuacji, gdy w rozwinięciu od pewnego miejsca są same 9. Takie rozwinięcie reprezentuje tę samą liczbę, co rozwinięcie, gdzie dziewiątki zastąpimy zerami, a pierwszą (od prawej) cyfrę mniejszą od 9 powiększamy o 1. Na przykład $0,09999\dots = 0,0(9) = 0,1$. Można to łatwo udowodnić, korzystając z własności działań (na przykład tego, że mnożenie przez 10 oznacza przesunięcie przecinka dziesiętnego w prawo o jedną pozycję). Niech $x = 0,0(9)$. Mamy wtedy

$$10 \cdot x = 0,(9) = 0,9 + 0,0(9) = 0,9 + x \Rightarrow 9 \cdot x = 0,9 \Rightarrow x = 0,1.$$

Liczby rzeczywiste, których rozwinięcia dziesiętne mają po przecinku same zera nazywamy liczbami całkowitymi, i oznaczamy $\mathbf{Z}$. Dodatnie liczby całkowite $1, 2, \dots$ (bez zera) nazywamy liczbami naturalnymi i oznaczamy $\mathbf{N}$.

Liczby wymierne

Liczby których rozwinięcia są skończone lub okresowe nazywamy liczbami wymiernymi. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy $\mathbf{Q}$. Liczby wymierne można zapisać jako ułamki $\frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in \mathbf{Z}$, oraz $n \neq 0$. Jeżeli $n \in \mathbf{N}$ oraz m i n nie mają wspólnego dzielnika, to przedstawienie liczby wymiernej x jako ułamka $\frac{m}{n}$ jest jednoznaczne, a taki ułamek nazywamy nieskracalnym. Każdą liczbę wymierną można przedstawić jako ułamek nieskracalny.

Przykłady: (a) $\frac{1}{7} = 0,1428571428 \dots = 0,(142857)$. Rozwinięcie dziesiętne otrzymujemy po prostu stosując „długie dzielenie”. Dzieląc kolejno w pewnym momencie widzimy, że reszta powtarza się, i zauważamy w związku z tym okres.

(b) $0,123 = \frac{123}{1000}$. Jest to ułamek nieskracalny, gdyż licznik i mianownik nie mają wspólnych dzielników, a mianownik jest dodatni.

(c) $0,(a_1 a_2 \dots a_k) = \frac{a_1 a_2 \dots a_k}{99 \dots 9}$ (k – dziewiątek w mianowniku). Łatwo to udowodnić, wypisując i rozwiązując odpowiednie równanie na $x = 0,(a_1 \dots a_k)$.

(d) Przekształcimy następujące rozwinięcie dziesiętne na ułamek

$$\begin{aligned} 0,123(45) &= 0,123 + 0,000(45) = \frac{123}{1000} + \frac{0,(45)}{1000} \\ &= \frac{123}{1000} + \frac{1}{1000} \frac{45}{99} = \frac{99 \cdot 123 + 45}{99000} = \frac{12222}{99000}. \end{aligned}$$

Liczby niewymierne

Liczby rzeczywiste które nie są wymierne, czyli których rozwinięcia dziesiętne są nieskończone i nieokresowe nazywamy liczbami niewymiernymi.

Przykłady: (a) Napiszmy liczbę, w której rozwinięciu dziesiętnym coraz dłuższe ciągi zer przedzielane są jedynekami:

$$x = 0,101001000100001 \dots 10 \dots 010 \dots$$

Serie zer są coraz dłuższe, a więc rozwinięcie nie jest okresowe. Nie jest też skończone, bo zawiera nieskończenie wiele jedynek. x jest więc liczbą rzeczywistą niewymierną.

(b) Innym przykładem liczby niewymiernej jest $\sqrt[3]{100}$. Pokażemy, że $\sqrt[3]{100}$ nie jest liczbą wymierną. Rozumowanie to jest typowe, i można je zaadaptować do wielu przykładów. Załóżmy, że $\sqrt[3]{100}$ jest liczbą wymierną, i przedstawmy ją w postaci ułamka nieskracalnego

$$\sqrt[3]{100} = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad 100 = \frac{m^3}{n^3} \quad \Rightarrow \quad n^3 \cdot 100 = m^3.$$

5 dzieli lewą stronę ostatniej równości, więc musi dzielić prawą stronę. 5 jest liczbą pierwszą, więc jeżeli dzieli iloczyn liczb, to musi dzielić któryś z czynników (to jest własność liczb pierwszych). W takim razie 5 musi dzielić m , a w takim razie prawa strona, jako sześćcian, dzieli się przez 125. W takim razie po lewej stronie równości n^3 musi się dzielić przez 5 (bo 100 dzieli się tylko przez 25), a więc znowuż, skoro 5 jest liczbą pierwszą, n musi dzielić się przez 5. Ułamek $\frac{m}{n}$ nie jest więc nieskracalny, co jest sprzeczne z założeniem. Założenie, że $\sqrt[3]{100}$ jest liczbą wymierną musi więc być fałszywe.

Uwagi: (i) Liczba pierwsza to liczba naturalna, która nie ma innych dzielników oprócz 1 i siebie samej. Liczby pierwsze mają następującą własność: jeżeli p jest pierwsza i $p|m \cdot n$ (p dzieli $m \cdot n$), to $p|m$ lub $p|n$.

(ii) Powyższe rozumowanie stanowi zastosowanie rozkładu liczby na czynniki pierwsze. Każdą liczbę naturalną można rozłożyć na iloczyn czynników, które są liczbami pierwszymi. Taki rozkład nazywamy rozkładem na czynniki pierwsze. Rozkład taki jest jednoznaczny. W równości

$$n^3 \cdot 100 = m^3$$

czynniki pierwsze n^3 i m^3 występują w kompletach po 3, a czynniki pierwsze 100, czyli 2 i 5 nie mają takich kompletów. Istnienie i jednoznaczność rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze to własność zbioru $\mathbf{N}$, której nie będziemy dowodzić, ale o której zawsze warto pamiętać. Jako ćwiczenie w którym rozkład na czynniki pierwsze może się przydać przytoczmy jeszcze następujące pytanie: ile zer końcowych ma liczba $(1000)!$ (1000 silnia)?

(iii) Pierwiastek występujący w poprzednim przykładzie, podobnie jak logarytm i potęgi występujące w następnym stanowią przykłady funkcji elementarnych. Zakładamy, że znamy funkcje elementarne, i nie będziemy zajmować się ich definicjami. W następnym rozdziale krótko przypomnimy najważniejsze fakty z nimi związane.

(c) $\log_2 3$. Będziemy rozumować jak w poprzednim przykładzie. Niech $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ będzie ułamkiem nieskracalnym

$$\log_2 3 = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad 2^{\frac{m}{n}} = 3 \quad \Rightarrow \quad 2^m = 3^n.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż lewa strona ostatniej równości zawiera jedynie dwójki jako swoje czynniki pierwsze, a prawa strona jedynie trójki. Założenie, że $\log_2 3 \in \mathbf{Q}$ musi więc być fałszywe.

(d) Suma, różnica, iloczyn i iloraz dwóch liczb wymiernych są wymierne (nie można dzielić przez zero). Suma, różnica, iloczyn i iloraz liczby wymiernej

i niewymiernej są niewymierne (chyba że, w przypadku mnożenia i dzielenia, liczba wymierna jest równa 0). Wynik działań na dwóch liczbach niewymiernych może być różny, wymierny lub niewymierny, w zależności od konkretnych wartości.

Interpretacja geometryczna

O liczbach rzeczywistych możemy myśleć jako o punktach prostej. Na prostej zaznaczamy miejsce zera i jedynki, strzałką oznaczamy kierunek wzrostu, i każdej liczbie rzeczywistej można przyporządkować, w sposób wzajemnie jednoznaczny punkt takiej prostej.

Rysunek 1.1: Prosta rzeczywista

Uporządkowanie zbioru $\mathbf{R}$

Jeżeli $x - y$ jest liczbą dodatnią, to piszemy $x > y$ („ x jest większe od y ”), jeżeli nieujemną, to piszemy $x \geq y$. Podobnie, jeżeli $x - y$ jest liczbą ujemną to piszemy $x < y$, jeżeli niedodatnią, to $x \leq y$. Widzimy więc, że dla $x, y \in \mathbf{R}$ mamy albo $x = y$, albo $x < y$ albo $x > y$. Mówimy, że zbiór $\mathbf{R}$ jest uporządkowany. Na prostej rzeczywistej $x > y$ jeżeli x jest bardziej na prawo od y – symbolizuje to strzałka w prawo – w prawo liczby rosną.

Symbole

$\forall$ czytamy „dla każdego”, $\exists$ czytamy „istnieje”, $\Leftrightarrow$ czytamy „wtedy i tylko wtedy”, $(\dots) \Rightarrow (\dots)$ czytamy „z $(\dots)$ wynika $(\dots)$ ”, $\in$ czytamy „należy do”, $\subset$ czytamy „jest podzbiorem”.

Aksjomat Archimedesesa

Liczby rzeczywiste mają następującą własność, która jest intuicyjnie zupełnie jasna: dla dowolnych $x, y > 0$ istnieje liczba naturalna n taka, że

$$nx > y.$$

Używając przytoczonych powyżej symboli aksjomat możemy zapisać jako

$$\forall x, y > 0 \exists n \in \mathbf{N} \ nx > y.$$

Z aksjomatu Archimedesesa wynika, na przykład, że istnieją liczby naturalne dowolnie duże (większe od każdej ustalonej liczby rzeczywistej). Ponieważ mnożenie przez -1 odwraca nierówności, więc z aksjomatu wynika też, że istnieją liczby całkowite dowolnie małe (mniejsze od każdej ustalonej liczby rzeczywistej). Zauważmy, że z aksjomatu wynika też, że istnieją liczby dodatnie dowolnie małe (dodatnie, ale mniejsze od dowolnej innej dodatniej). Będziemy używali wszystkich tych faktów, nie powołując się już bezpośrednio na aksjomat Archimedesesa.

Kresy

Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbf{R}$ jest ograniczony od góry, jeżeli

$$\exists c \forall x \in X \ x \leq c,$$

ograniczony od dołu, jeżeli

$$\exists d \forall x \in X \ x \geq d,$$

i ograniczony, jeżeli jest ograniczony od góry i od dołu jednocześnie. Stałe c i d w powyższych warunkach nazywamy odpowiednio ograniczeniem od góry i od dołu zbioru A . Zbiór liczb naturalnych jest ograniczony od dołu (ograniczeniem od dołu jest, na przykład liczba 1), ale nie jest ograniczony od góry (z aksjomatu Archimedesesa wynika, że nie da się znaleźć c , będącego ograniczeniem $\mathbf{N}$ od góry). Jeżeli zbiór $A \subset \mathbf{R}$ jest ograniczony od góry, to najmniejsze ograniczenie A od góry nazywamy kresem górnym A i oznaczamy $\sup A$ (supremum A). Jeżeli $A \subset \mathbf{R}$ jest ograniczony od dołu, to największe ograniczenie A od dołu nazywamy kresem dolnym A , i zapisujemy $\inf A$ (infimum A). Czyli, $s = \sup A$ jeżeli

- $\forall x \in A \ x \leq s,$
- $\forall u < s \exists x \in A \ x > u.$

Warunek (i) mówi, że A jest ograniczony od góry i s jest ograniczeniem od góry, a warunek (ii) mówi, że żadna liczba mniejsza od s nie jest ograniczeniem A od góry, czyli, że s jest najmniejszym ograniczeniem od góry. Podobnie możemy podsumować definicję kresu dolnego: $k = \inf A$ jeżeli

- $\forall x \in A \ x \geq k$,
- $\forall l > k \ \exists x \in A \ x < l$.

Aksjomat ciągłości

Każdy zbiór $A \subset \mathbf{R}$ ograniczony od góry ma kres górny. Równoważnie można sformułować tę własność dla kresów dolnych: każdy zbiór ograniczony od dołu ma kres dolny. Stwierdzenia te wyrażają pewną własność ciągłości zbioru liczb rzeczywistych – wypełniają całą prostą rzeczywistą, bez przerw.

Uwaga: Zbiór może zawierać swój kres lub nie. Na przykład

$$\sup\{x : x < 1\} = \sup\{x : x \leq 1\} = 1,$$

przy czym pierwszy zbiór nie zawiera 1, a drugi zawiera.

Przykład: $A = \{\frac{m^2+n^2}{2mn} : m, n \in \mathbf{N}, m < n\}$. Zauważmy, że A nie jest ograniczony od góry. Istotnie, zbiór A zawiera wszystkie liczby postaci $\frac{m^2+1}{2m}$, $m \in \mathbf{N}$, $m > 1$. Każda taka liczba jest większa od $\frac{m}{2}$, a więc A zawiera liczby większe od dowolnej liczby naturalnej. Nie może więc być ograniczony od góry. Zauważmy, że jest ograniczony od dołu, i ograniczeniem od dołu jest 1. Wykorzystamy znaną nierówność:

$$2ab \leq a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{m^2 + n^2}{2mn} \geq 1 \quad \text{dla } m, n > 0.$$

Przekonamy się teraz, że 1 jest największym ograniczeniem A od dołu. Niech $c > 1$. Wtedy $\frac{1}{c-1}$ jest liczbą dodatnią, i z aksjomatu Archimidesa wynika, że istnieje liczba naturalna m większa od $\frac{1}{c-1}$. Niech dodatkowo $m \geq 2$, co zawsze możemy założyć, ewentualnie powiększając m . Wtedy

$$2m(m-1) > m > \frac{1}{c-1} \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{2m(m-1)} < c.$$

Mamy więc

$$\frac{m^2 + (m-1)^2}{2m(m-1)} = \frac{m^2 + m^2 - 2m + 1}{2m(m-1)} = \frac{2m(m-1) + 1}{2m(m-1)} = 1 + \frac{1}{2m(m-1)} < c.$$

Zakładając, że $c > 1$ znaleźliśmy w zbiorze A element $\frac{m^2+(m-1)^2}{2m(m-1)}$ mniejszy od c . Tak więc żadne $c > 1$ nie jest ograniczeniem A od dołu, a więc 1 jest największym ograniczeniem A od dołu, czyli $\inf A = 1$. Przy okazji zauważmy, że $1 \notin A$: gdyby $1 \in A$, to istniałyby $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, takie, że $m^2 + n^2 = 2mn$. Wiemy jednak, że taka równość jest równoważna $(m-n)^2 = 0$, czyli $m = n$.

Przedziały

Przedziały oznaczamy następująco: $(a, b) = \{x : a < x < b\}$, $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$, $(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$ oraz $[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$. W przypadku przedziałów (a, b) i $(a, b]$ dopuszczamy $a = -\infty$, a w przypadku przedziałów (a, b) i $[a, b)$ dopuszczamy $b = \infty$. Takie przedziały oznaczają wtedy odpowiednie półproste. Domyślnie rozumiemy, że $a \leq b$.

Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej definiujemy następująco

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jeżeli } x \geq 0, \\ -x & \text{jeżeli } x < 0. \end{cases}$$

Wartość bezwzględna ma następujące własności:

1. $|-x| = |x|$ oraz $-|x| \leq x \leq |x|$,
2. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (nierówność trójkąta),
3. $||x| - |y|| \leq |x - y|$,
4. $|x - y|$ reprezentuje odległość x od y na prostej rzeczywistej,
5. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ oraz $|x| = \sqrt{x^2}$,
6. $|x| \geq 0$ oraz $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Dla przykładu przeprowadzimy dowód nierówności trójkąta (2). Rozpatrzmy osobno dwa przypadki

(a) x i y mają ten sam znak $\pm$. Wtedy ich suma ma ten sam znak, a więc

$$|x + y| = \pm(x + y) = \pm x + \pm y = |x| + |y|.$$

W tym przypadku widzimy, że nierówność trójkąta jest równością.

(b) x i y mają przeciwne znaki. Możemy założyć, że $x \leq 0 \leq y$, w przeciwnym przypadku zamieniając miejscami x i y . Jeżeli $x + y \geq 0$ to

$$|x + y| = x + y \leq -x + y = |x| + |y|,$$

a jeżeli $x + y \leq 0$ to

$$|x + y| = -(x + y) = -x - y \leq -x + y = |x| + |y|.$$

W tym przypadku, jeżeli żadna z liczb x, y nie jest zerem, to nierówność trójkąta jest ostra.

Część całkowita i ułamkowa

Część całkowita x to największa liczba całkowita nie większa od x . Część całkowitą x oznaczamy $[x]$. Część ułamkowa x to $\{x\} = x - [x]$. Część całkowita ma więc następujące własności

- $[x] \in \mathbf{Z}$,
- $[x] \leq x < x + 1$ czyli $x - 1 < [x] \leq x$,
- $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbf{Z}$.

Przykłady: $[1, 5] = 1$, $[-1, 5] = -1$, $\{-1, 5\} = 0, 5$.

Rysunek 1.2: Część całkowita i część ułamkowa

Gęstość liczb wymiernych i niewymiernych w $\mathbf{R}$

W każdym przedziale otwartym (a, b) leży liczba wymierna i niewymierna. Niech (a, b) będzie dowolnym przedziałem ($a < b$). Udowodnimy, że w (a, b) musi leżeć liczba wymierna, niewymierna pozostaje jako ćwiczenie. $\frac{1}{b-a} > 0$, więc z aksjomatu Archimedesesa istnieje $n \in \mathbf{N}$ taka, że $n > \frac{1}{b-a}$ czyli $\frac{1}{n} < (b-a)$. Rozważmy zbiór liczb postaci

$$\left\{ \frac{k}{n} : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Któraś z liczb z powyższego zbioru musi wpaść do przedziału (a, b) . Niech

$$k_0 = \sup \left\{ k \in \mathbf{Z} : \frac{k}{n} \leq a \right\},$$

(łatwo uzasadnić, że powyższe supremum istnieje, i że należy do tego zbioru). Zauważmy, że $\frac{k_0+1}{n} > a$ oraz skoro $\frac{k_0}{n} \leq a$, a $\frac{1}{n} < (b-a)$, to $\frac{k_0+1}{n} < a+(b-a) = b$. Tak więc $\frac{k_0+1}{n} \in (a, b)$ i jest oczywiście liczbą wymierną.

Zasada indukcji

Zbiór liczb naturalnych ma następującą własność: Każdy jego niepusty podzbiór posiada element najmniejszy. Z tej własności wynika następująca zasada indukcji. Niech $T(n)$, $n \geq n_0$ będzie pewnym ciągiem twierdzeń. Często w zastosowaniach są to równości bądź nierówności, w których występuje liczba naturalna n . Niech:

1. $T(n_0)$ będzie prawdziwe (punkt startowy indukcji),
2. $\forall n \geq n_0$ zachodzi wynikanie $(T(n) - \text{prawdziwe}) \Rightarrow (T(n+1) - \text{prawdziwe})$ (krok indukcyjny).

Wtedy wszystkie twierdzenia $T(n)$, $n \geq n_0$ są prawdziwe. Zasada indukcji jest intuicyjnie oczywista, i można ją łatwo udowodnić: Jeżeli nie wszystkie twierdzenia $T(n)$, $n \geq n_0$ są prawdziwe, to niech $A \subset \mathbf{N}$ będzie zbiorem tych $n \geq n_0$, dla których $T(n)$ nie jest prawdziwe. A ma element najmniejszy który oznaczmy przez $\tilde{n}$. Zauważmy, że z warunku (1) wynika, że $\tilde{n} > n_0$. Mamy więc $T(\tilde{n})$ fałszywe (bo $\tilde{n} \in A$), ale $T(\tilde{n}-1)$ prawdziwe, gdyż $\tilde{n}-1 \notin A$. Ale to przeczy warunkowi (2), gdyż z prawdziwości $T(\tilde{n}-1)$ wynika prawdziwość $T(\tilde{n})$.

Przykład: Pokażemy, że $\forall n \in \mathbf{N}$ prawdziwe jest twierdzenie $T(n)$, które

w tym przypadku jest nierównością $10n < 2^n + 25$. Przeprowadzimy krok indukcyjny, czyli dowód (2). Założmy więc

$$10n < 2^n + 25,$$

i spróbujmy, przy wykorzystaniu powyższego udowodnić

$$10(n+1) < 2^{n+1} + 25. \quad (1.1)$$

Mamy więc

$$10(n+1) = 10n + 10 < 2^n + 25 + 10. \quad (1.2)$$

Żeby dokończyć dowód, i dojść do (1.1) potrzebujemy nierówność $10 \leq 2^n$, która, niestety, jest prawdziwa tylko dla $n \geq 4$. Założmy więc, że $n \geq 4$, i dokończmy (1.2):

$$2^n + 25 + 10 < 2^n + 2^n + 25 = 2^{n+1} + 25,$$

czyli mamy zrobiony krok indukcyjny, dla dowolnego $n \geq 4$. Oznacza to, że zasadę indukcji będziemy mogli zastosować tylko do udowodnienia nierówności dla $n \geq 4$. Co z nierównościami dla $n = 1, 2, 3$? Tych kilka przypadków sprawdzimy ręcznie, niezależnie od indukcji. Dodatkowo został jeszcze przypadek $n = n_0 = 4$, który jest punktem startowym dla indukcji $n \geq 4$. Musimy więc sprawdzić bezpośrednio:

$n = 1$: $10 < 2 + 25$ prawdziwe,

$n = 2$: $20 < 2^2 + 25$ prawdziwe,

$n = 3$: $30 < 2^3 + 25$ prawdziwe, oraz w końcu

$n = 4$: $40 < 2^4 + 25 = 41$ też prawdziwe.

Skorzystaliśmy z zasady indukcji, żeby przeprowadzić dowód dla $n \geq 4$, a pozostałe przypadki sprawdziliśmy bezpośrednio. To jest typowy przykład: próbując wykonać krok indukcyjny znajdujemy ograniczenie na n przy którym krok indukcyjny jest możliwy. Do tego ograniczenia dopasowujemy punkt startowy indukcji, a pozostałe przypadki sprawdzamy „ręcznie”.

Liczby zespolone

Zbiór liczb zespolonych $\mathbf{C}$ to zbiór symboli $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbf{R}$. Symbole dodajemy i mnożymy zgodnie ze wzorami

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i, \\ (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i. \end{aligned}$$

Liczby rzeczywiste traktujemy jako podzbiór liczb zespolonych $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ poprzez identyfikację $x \sim x + 0i$. Zauważmy, że ta identyfikacja zachowuje działania: na przykład $(a_1 + 0i) + (a_2 + 0i) = (a_1 + a_2) + 0i$. Zauważmy też że $(i)^2 = (0 + ii)^2 = -1 + 0i = -1$. Przy powyższej identyfikacji $i^2 = -1$, a liczby zespolone traktujemy jako rozszerzenie zbioru liczb rzeczywistych. Zbiór $\mathbf{C}$ ma zaletę: każdy wielomian o współczynnikach zespolonych rozkłada się na iloczyn czynników liniowych. Dzięki temu liczby zespolone stanowią ważne narzędzie i dla matematyków i dla inżynierów (także dla informatyków :-)). Przypomnijmy następujące pojęcia:

- $\Re(a + bi) =$ część rzeczywista $(a + bi) = a$,
- $\Im(a + bi) =$ część urojona $(a + bi) = b$,
- $\overline{a + bi} =$ sprzężenie $(a + bi) = a - bi$.

Mamy następujące własności

1. $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,
2. $\Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$, $\Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$,
3. $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbf{R}$,
4. $z \cdot \overline{z} = \Re(z)^2 + \Im(z)^2$ – nieujemna liczba rzeczywista.

Moduł

Moduł liczby zespolonej definiujemy jako

$$|z| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}.$$

Przykłady: $|-1 + 2i| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $|i| = |0 + 1i| = 1$.

Moduł liczby zespolonej jest odpowiednikiem wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej. Mamy następujące własności modułu

- $|z| \geq 0$ i $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,
- $|z| = |-z| = |\overline{z}|$, $|\alpha z| = |\alpha| \cdot |z|$ dla $\alpha \in \mathbf{R}$,
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ (nierówność trójkąta),
- $|z - w| \geq |z| - |w|$.

Interpretacja geometryczna

Liczby zespolone, czyli wyrażenia postaci $a + bi$ można utożsamiać z punktami płaszczyzny $\mathbf{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$. Przy tej interpretacji dodawanie

Rysunek 1.3: Płaszczyzna liczb zespolonych

jest zgodne z dodawaniem wektorów, a mnożenie przez liczbę rzeczywistą z mnożeniem przez skalar. Sprzężenie jest odbiciem względem osi poziomej, a moduł oznacza euklidesową odległość od początku układu współrzędnych.

Rysunek 1.4: Moduł i sprzężenie liczby zespolonej

Postać trygonometryczna

Liczbę zespoloną $a + bi$ można zapisać w tak zwanej postaci trygonometrycznej. W tej postaci liczby łatwo mnoży się, podnosi do potęgi, wyciąga

pierwiastki. Niech $z = a + bi \neq 0$

$$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right).$$

Można znaleźć taką liczbę $\varphi \in [0, 2\pi)$, że

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Możemy to podstawić do wzoru na z , i otrzymamy postać trygonometryczną liczby zespolonej

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Używając interpretacji geometrycznej zapis liczby zespolonej $a + bi$ w postaci trygonometrycznej $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ odpowiada przedstawieniu punktu (a, b) na płaszczyźnie we współrzędnych biegunowych (r, φ) .

Rysunek 1.5: Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Liczbę φ nazywamy argumentem z . Ponieważ funkcje $\sin$ i $\cos$ są okresowe o okresie 2π , więc istnieje nieskończenie wiele argumentów każdej liczby z , różniących się dokładnie o całkowitą wielokrotność 2π . Ten spośród argumentów, który leży w przedziale $[0, 2\pi)$ (jest dokładnie jeden taki) nazywamy argumentem głównym z .

Przykład: $z = 1 - i = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}} i)$. Szukamy $\varphi \in [0, 2\pi)$, takiej, że

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Łatwo zauważyć, że $\varphi = \frac{7}{4}\pi$.

Rysunek 1.6: Współrzędne biegunowe

Uwagi: (i) Dwie liczby zespolone są równe, jeżeli ich części rzeczywiste i urojone są równe. W przypadku zapisu liczb w postaci trygonometrycznej mamy

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

wtedy gdy $r_1 = r_2$ oraz $\varphi_1 - \varphi_2$ jest całkowitą wielokrotnością 2π ,

(ii) $r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ (moduły mnożymy, argumenty dodajemy),

(iii) $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$,

(iv) pierwiastkiem liczby zespolonej z stopnia $n \in \mathbf{N}$ nazywamy liczbę zespoloną w taką, że $w^n = z$. Posługując się postacią trygonometryczną pokażemy, że każda liczba zespolona $z \neq 0$ ma dokładnie n różnych pierwiastków stopnia n . Niech $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ (przy czym φ – argument główny z), $n \in \mathbf{N}$, i niech

$$w_l = \sqrt[n]{r}(\cos \psi_l + i \sin \psi_l), \quad \psi_l = \frac{\varphi + 2l\pi}{n} \quad l = 0, 1, \dots, n-1.$$

Zauważmy, że każda z liczb w_l jest pierwiastkiem stopnia n z z , oraz wszystkie są różne: $\psi_k - \psi_l = \frac{k-l}{n} 2\pi$, przy czym $-1 < \frac{k-l}{n} < 1$. Jediną liczbą całkowitą spełniającą obie nierówności jest zero, a więc jeżeli $w_k = w_l$ to $k = l$. Mamy więc n różnych pierwiastków. Więcej nie może być, gdyż każdy pierwiastek stopnia n z liczby z jest pierwiastkiem wielomianu stopnia n $P(w) = w^n - z$. Wiemy, że wielomiany stopnia n mają najwyżej n różnych pierwiastków.

Przykład: Obliczmy następujące pierwiastki: $\sqrt[4]{1-i} = \sqrt[8]{2}(\cos \psi_l + i \sin \psi_l)$, gdzie $\psi_l = \frac{\frac{7}{4}\pi + 2l\pi}{4} = \frac{(7+8l)\pi}{16}$, $l = 0, 1, 2, 3$.

2 Funkcje

Przypomnimy najważniejsze potrzebne nam pojęcia dotyczące funkcji. Niech $A \subset \mathbf{R}$ będzie podzbiorem liczb rzeczywistych. Funkcją f określoną na A o wartościach rzeczywistych nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi A jakiejś liczby rzeczywistej. Funkcja jest o wartościach zespolonych, jeżeli każdemu punktowi A przyporządkowana jest liczba zespolona. Piszemy

$$f : M \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{lub} \quad f : M \rightarrow \mathbf{C}.$$

Zbiór A nazywa się dziedziną funkcji f i często oznaczany jest przez D_f . Zbiór

$$\{y : \exists x \in D_f \ f(x) = y\}$$

nazywa się obrazem f , lub zbiorem wartości f .

Określenie funkcji (czyli przyporządkowanie wartości elementom dziedziny) najczęściej ma postać wzoru. Często nie pisze się dziedziny D_f . Wtedy domyślnie funkcja jest określona na największym zbiorze, na którym wzór definiujący funkcję ma sens. Taki maksymalny zbiór nazywamy dziedziną naturalną f .

Funkcje elementarne

(a) Wielomiany to funkcje postaci $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. Współczynniki mogą być rzeczywiste lub zespolone. $D_f = \mathbf{R}$. Wielomian stopnia n ma nie więcej niż n pierwiastków. Wielomian o współczynnikach rzeczywistych stopnia nieparzystego ma co najmniej 1 pierwiastek rzeczywisty, natomiast stopnia parzystego może wogóle nie mieć pierwiastków rzeczywistych. Dla dużych $|x|$ wielomian zachowuje się podobnie do swojego wyrazu wiodącego a_nx^n .

(b) Funkcje wymierne to funkcje postaci $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie P i Q są wielomianami. $D_f = \{x : Q(x) \neq 0\}$.

(c) Funkcja potęgowa $f(x) = x^\alpha$. D_f zależy od α . Jeżeli $\alpha = \frac{m}{n}$ jest wymierna to $x^\alpha = \sqrt[n]{x^m}$. $x^0 = 1$ dla każdego x , oraz dla $m < 0$ mamy $x^m = \frac{1}{x^{-m}}$. Jeżeli α jest niewymierna, to

$$x^\alpha = \sup\{x^q : q \in \mathbf{Q}, q < \alpha\}.$$

Poza szczególnymi przypadkami α (na przykład $\alpha \in \mathbf{N}$) mamy $D_f = \mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$.

(d) Funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$, $a > 0$. $D_f = \mathbf{R}$.

(e) Logarytm $f(x) = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$. $D_f = \mathbf{R}^+$. Logarytm jest funkcja odwrotną do wykładniczej, czyli $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$.

Mamy następujące własności potęg i logarytmów (w każdym przypadku musimy pamiętać o ewentualnych ograniczeniach na zakres zmiennych): $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$, $(x \cdot y)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$, $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$, $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

(f) Funkcje trygonometryczne. Na okręgu jednostkowym odmierzymy od punktu $(1, 0)$ odległość φ przeciwnie do ruchu wskazówek zegara jeżeli $\varphi > 0$ i zgodnie z ruchem wskazówek zegara jeżeli $\varphi < 0$. Daje nam to pewien punkt na okręgu jednostkowym (x, y) . Współrzędne tego punktu nazywamy funkcjami $\cos$ i $\sin$ odpowiednio:

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi.$$

Funkcje $\cos$ i $\sin$ są okresowe o okresie 2π , to znaczy obie spełniają $f(x+2\pi) = f(x)$. Mamy też $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, oraz równości

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \psi) &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi, \\ \sin(\varphi + \psi) &= \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi. \end{aligned}$$

Działania na funkcjach

f jest rosnąca (lub ściśle rosnąca), jeżeli $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Mówimy, że f jest słabo rosnąca (lub niemalejąca, jeżeli $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$). Podobnie f jest malejąca (ściśle malejąca) jeżeli $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ oraz słabo malejąca (nierosnąca) jeżeli $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$. Innymi słowy funkcję rosnącą można zastosować do stron nierówności, i nierówność się zachowa, a w przypadku funkcji malejącej nierówność zamieni się na przeciwną. Mówimy, że f jest monotoniczna, jeżeli jest albo rosnąca, albo malejąca, i to samo z przymiotnikami „ściśle” lub „słabo”. Funkcje mogą być monotoniczne kawałkami. Na przykład, $f(x) = x^3$ jest ściśle rosnąca, a więc nierówności możemy podnosić stronami do 3 potęgi. Natomiast $f(x) = x^2$ jest kawałkami monotoniczna — rosnąca dla $x \geq 0$ i malejąca dla $x \leq 0$. Nierówności możemy podnosić stronami do kwadratu, pod warunkiem, że dotyczą liczb nieujemnych.

Wykres

Jeżeli f jest funkcją o wartościach rzeczywistych, to wykresem f nazywamy następujący podzbiór płaszczyzny

$$\{(x, y) : x \in D_f, y = f(x)\} \subset \mathbf{R}^2.$$

3 Ciągi

Definicja 3.1. Ciąg rzeczywisty to funkcja $a : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$, a ciąg zespolony to funkcja $a : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$.

W przypadku ciągów wartość a w n nazywamy n -tym wyrazem ciągu, a zamiast $a(n)$ często piszemy a_n . Ciąg o wyrazach a_n oznaczamy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ lub krócej $\{a_n\}$. Głównie będziemy rozważać ciągi rzeczywiste, jeżeli gdzieś pojawią się ciągi zespolone, to zwrócimy na to uwagę.

Przykłady: (a) Ciąg (postęp) geometryczny: $a, aq, aq^2, \dots, a_n = aq^{n-1}$,

(b) ciąg stały $a_n = c$,

(c) ciąg harmoniczny $a_n = \frac{1}{n}$,

(d) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$,

(e) ciąg Fibonacciego $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

Żeby zdefiniować ciąg musimy jednoznacznie opisać w jaki sposób mają być obliczane wyrazy a_n . Można to zrobić wzorem ogólnym, jak w przykładach (a)–(c), lub *rekurencyjnie*, jak w przykładach (d) i (e). Definicja rekurencyjna (czasem nazywana też indukcyjną) opisuje w jaki sposób następny wyraz ciągu obliczyć znając poprzednie. Trzeba też zdefiniować wystarczająco wiele wyrazów początkowych. Na przykład w definicji ciągu Fibonacciego kolejne wyrazy obliczamy z dwóch poprzednich, a więc jako punkt wyjściowy musimy podać dwa pierwsze wyrazy.

Mówimy, że ciąg jest:

- ściśle rosnący jeżeli $a_n < a_{n+1}$, ściśle malejący jeżeli $a_n > a_{n+1}$,
- słabo rosnący jeżeli $a_n \leq a_{n+1}$, słabo malejący jeżeli $a_n \geq a_{n+1}$,
- ściśle monotoniczny jeżeli jest albo ściśle rosnący albo ściśle malejący, oraz słabo monotoniczny jeżeli jest słabo rosnący lub słabo malejący.

Czasem mówimy po prostu, że ciąg jest rosnący lub malejący, jeżeli nie jest ważne, czy chodzi nam ściśle, czy słabą monotoniczność.

Ciąg harmoniczny z przykładu (c) jest ściśle malejący, natomiast ciągi z przykładów (d) i (e) ściśle rosnące. Przykład (c) wynika wprost ze wzoru: $a_n > a_{n+1}$ to nic innego niż $n + 1 > n$. Przykłady (d) i (e) można sprawdzić indukcyjnie. W przypadku (d) najpierw dowodzimy, że wszystkie wyrazy a_n są mniejsze niż 2, a następnie korzystając z tego dowodzimy, że ciąg jest rosnący. Oba dowody można przeprowadzić przy pomocy metody indukcji. Podobnie w przykładzie (e), najpierw indukcyjnie pokazujemy, że wszystkie wyrazy są ściśle dodatnie $a_n > 0$, a następnie wprost ze wzoru rekurencyjnego

pokazujemy, że ciąg jest rosnący $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} > a_{n+1}$. To jest typowa sytuacja – jeżeli ciąg zdefiniowany jest rekurencyjnie, to jego własności dają się z reguły udowodnić indukcyjnie.

Działania na ciągach

Ciągi dodajemy, odejmujemy, mnożymy i dzielimy tak jak funkcje: $(a \pm b)_n = a_n \pm b_n$, $(a \cdot b)_n = a_n \cdot b_n$, $\left(\frac{a}{b}\right)_n = \frac{a_n}{b_n}$, $b_n \neq 0$.

Ciągi ograniczone

Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony, jeżeli

$$\exists M \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad |a_n| \leq M,$$

mówimy, że jest ograniczony od góry, jeżeli

$$\exists M \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad a_n \leq M,$$

oraz mówimy, że jest ograniczony od dołu, jeżeli

$$\exists M \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad a_n \geq M.$$

Przykłady (a) ciąg harmoniczny $a_n = \frac{1}{n}$ jest ograniczony, od dołu przez 0, i od góry przez $a_1 = 1$. Ogólniej, ciąg malejący zawsze jest ograniczony od góry przez swój pierwszy wyraz, podobnie ciąg rosnący jest ograniczony od dołu przez swój pierwszy wyraz,

(b) Ciąg Fibonacciego nie jest ograniczony od góry. Mówiliśmy już, że wyrazy tego ciągu są dodatnie. Podobnie, indukcyjnie można udowodnić, że wyrazy tego ciągu spełniają $a_n \geq n$ dla $n \geq 6$. Z tego widać już, że ciąg nie może być ograniczony od góry.

(c) Ciąg $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ jest ograniczony. Widać od razu, że wyrazy tego ciągu są dodatnie (pierwiastek jest funkcją rosnącą), czyli ciąg jest ograniczony od dołu przez 0. Pokażemy, że jest też ograniczony od góry.

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+1} + 1} \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(d) Postęp geometryczny $a_n = aq^{n-1}$ jest ograniczony, jeżeli $|q| \leq 1$ i nieograniczony, jeżeli $|q| > 1$ i $a \neq 0$. Pierwsze stwierdzenie jest oczywiste: $|a_n| = |aq^{n-1}| = |a||q|^{n-1} \leq |a|$. Drugie stwierdzenie wymaga pewnego dowodu. Możemy wykorzystać na przykład następującą ważną nierówność, którą można udowodnić na przykład indukcyjnie: dla $\epsilon > 0$

$$(1 + \epsilon)^n > 1 + n\epsilon. \quad (3.1)$$

Jeżeli $|q| > 1$ to $|q| = (1 + \epsilon)$ dla pewnego $\epsilon > 0$. Mamy więc

$$|a_n| = |a| \cdot |q|^{n-1} = \frac{|a|}{|q|} (1 + \epsilon)^n > \frac{|a|}{|q|} (1 + n\epsilon).$$

Jeżeli $|a_n| \leq M$, to

$$\frac{|a|}{|q|} (1 + n\epsilon) \leq M \quad \Rightarrow \quad n \leq \frac{1}{\epsilon} \left(M \frac{|q|}{|a|} - 1 \right).$$

Z powyższego widać już, że ciąg a_n nie może być ograniczony.

Zbieżność ciągu

Przechodzimy teraz do najważniejszego dla nas pojęcia dotyczącego ciągów

Definicja 3.2. *Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do liczby g jeżeli*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |a_n - g| < \epsilon.$$

Zapisujemy to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \quad \text{lub} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g.$$

Definicja odnosi się do ciągów i rzeczywistych i zespolonych, w tym drugim przypadku granica też może być liczbą zespoloną, a $|\cdot|$ oznacza moduł liczby zespolonej.

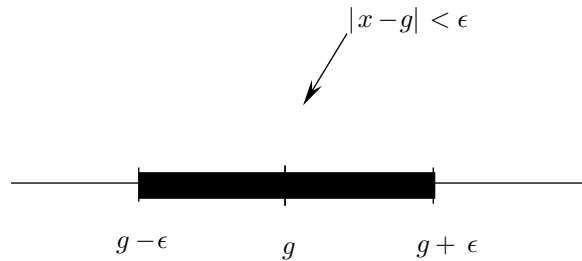
Przykłady (a) $a_n = \frac{1}{n}$. Można łatwo udowodnić, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Udowodnijmy to.

$$|a_n - 0| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Wystarczy więc rozwiązać nierówność $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \epsilon$

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \epsilon \Leftrightarrow 2\sqrt{n} > \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{4\epsilon^2}.$$



Rysunek 3.1: Granica ciągu.

Dla zadanego $\epsilon > 0$ istnieje więc $n_0 = \left\lceil \frac{1}{4\epsilon^2} \right\rceil + 1$ spełniające warunek definicji.

(c) $a_n = \frac{n^2+2}{2n^2-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$. Podobnie jak w poprzednim przykładzie rozwiążemy odpowiednią nierówność. Tym razem ułatwimy sobie rachunki stosując oszacowania, zamiast rozwiązania dokładnego

$$\left| \frac{n^2+2}{2n^2-1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{5}{2(2n^2-1)} \leq \frac{5}{2n}.$$

Ostatnie oszacowanie, czyli $2(2n^2-1) \geq 2n$ jest prawdziwe dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$, i można je udowodnić rozwiązując nierówność kwadratową. Na koniec wystarczy więc rozwiązać prostą nierówność $\frac{5}{2n} < \epsilon$ co daje $n > \frac{5}{2\epsilon}$. Niech więc, dla zadanego $\epsilon > 0$ będzie $n_0 = \left\lceil \frac{5}{2\epsilon} \right\rceil + 1$.

(d) Ciąg stały $a_n = c$ ma granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$.

Zbieżność ciągów do podanych granic w powyższych przykładach pokazaliśmy korzystając wprost z definicji. W praktyce najczęściej pokazujemy

zbieżność korzystając z różnych własności granic. Na przykład, mamy następujące podstawowe twierdzenie

Twierdzenie 3.3. *Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ to ciągi $\{(a \pm b)_n\}$ i $\{(a \cdot b)_n\}$ są zbieżne, oraz*

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (a \pm b)_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a \cdot b)_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b.\end{aligned}$$

Jeżeli dodatkowo $b_n \neq 0$ dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$ i $b \neq 0$ to ciąg ilorazów $\{(\frac{a}{b})_n\}$ jest zbieżny, oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{b}\right)_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

W dowodzie twierdzenia wykorzystamy następujące obserwacje

Fakt 3.4. (i) *Ciąg zbieżny jest ograniczony. Żeby się o tym przekonać niech ciąg $\{a_n\}$ będzie zbieżny do a i weźmy dowolne $\epsilon > 0$, na przykład $\epsilon = 1$. Wtedy istnieje $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że dla wszystkich $n \geq n_0$ zachodzi $|a_n| - |a| \leq |a_n - a| < 1$, czyli $|a_n| < |a| + 1$. Niech*

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, |a| + 1\}.$$

Wtedy ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony przez M : $\forall n \in \mathbf{N} \quad |a_n| \leq M$.

(ii) *Ciąg $\{b_n\}$ liczb różnych od zera, zbieżny do granicy b różnej od zera jest „oddzielony od zera”:*

$$\exists \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad |b_n| \geq \delta.$$

Żeby się o tym przekonać, niech $\epsilon = \frac{|b|}{2}$. Wtedy, z definicji zbieżności istnieje $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że $|b| - |b_n| \leq |b - b_n| < \frac{|b|}{2}$, czyli $|b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$. Niech

$$\delta = \min \left\{ |b_1|, |b_2|, \dots, |b_{n_0-1}|, \frac{|b|}{2} \right\} > 0.$$

Wtedy $\forall n \in \mathbf{N}$ mamy $|b_n| \geq \delta$.

Dowód twierdzenia. Przeprowadzimy dowód dla iloczynu, pozostałe przypadki pozostawiając jako ćwiczenie. Dla iloczynu nierównością, którą będziemy chcieli rozwiązać ze względu na n będzie

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| < \epsilon.$$

Zróbmy tak

$$\begin{aligned} |a \cdot b_n - a \cdot b| &= |a \cdot b_n - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a \cdot b| \\ &\leq |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n| + |a \cdot b_n - a \cdot b| \\ &= |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b|. \end{aligned}$$

Wyrażenie po lewej stronie będziemy więc mogli oszacować korzystając z tego, że możemy oszacować wyrażenie po prawej stronie. Wiemy, że ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony (skoro jest zbieżny), więc niech $|b_n| \leq M$. Niech $\tilde{M} = \max\{M, |a|, 1\}$. Niech $\epsilon > 0$. Ustalmy $\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{2\tilde{M}} > 0$ (możemy wykonać dzielenie, bo wiemy, że $\tilde{M} > 0$). Wtedy istnieje $n_1 \in \mathbf{N}$ takie, że $|a_n - a| < \tilde{\epsilon}$ dla $n \geq n_1$ oraz istnieje $n_2 \in \mathbf{N}$ takie, że $|b_n - b| < \tilde{\epsilon}$ dla $n \geq n_2$. Niech $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Wtedy $|a_n - a| < \tilde{\epsilon}$ oraz $|b_n - b| < \tilde{\epsilon}$ dla $n \geq n_0$. Mamy więc, dla $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n| &\leq |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b| \\ &\leq |a_n - a| \tilde{M} + |b_n - b| \tilde{M} \\ &< \tilde{\epsilon} \tilde{M} + \tilde{\epsilon} \tilde{M} \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

co kończy dowód □

Przykład: Niech

$$a_n = \frac{n^2 + 2}{2n^2 - 1} = \frac{1 + \frac{2}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}}.$$

Mamy $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{2}{n^2} = 2 \cdot \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ a więc licznik dąży do 1, a mianownik do 2, a więc

$$a_n = \frac{1 + \frac{2}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

Granice tę obliczyliśmy wcześniej z definicji, ale teraz mogliśmy to zrobić znacznie sprawniej.

Granice niewłaściwe

Definicja 3.5. Ciąg rzeczywisty $\{a_n\}$ ma granicę niewłaściwą $+\infty$ (mówimy, że jest rozbieżny do $+\infty$) jeżeli

$$\forall M \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n > M.$$

Ciąg rzeczywisty $\{a_n\}$ ma granicę niewłaściwą $-\infty$ (jest rozbieżny do $-\infty$) jeżeli

$$\forall M \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n < M.$$

Ciąg zespolony $\{a_n\}$ ma granicę niewłaściwą ∞ (jest rozbieżny do ∞) jeżeli

$$\forall M \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |a_n| > M,$$

(w przypadku ciągów zespolonych nie rozróżniamy nieskończoności).

Przykład: Ciąg $a_n = \frac{n^2-3}{n+1}$ jest rozbieżny do $+\infty$: dla $n \geq 3$ mamy

$$\frac{n^2-3}{n+1} \geq \frac{\frac{1}{2}n^2}{2n} = \frac{n}{4},$$

natomiast $\frac{n}{4} > M \Leftrightarrow n \geq [4M] + 1$. Niech więc $n_0 = \max\{3, [4M] + 1\}$, wtedy dla $n \geq n_0$ mamy $|a_n| > M$.

Twierdzenie o działaniach na granicach rozszerza się na niektóre przypadki granic niewłaściwych. Na przykład, niech $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ (ciągi rzeczywiste). Wtedy

$$a = +\infty, b > 0 \Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty,$$

$$a = +\infty, b < 0 \Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty.$$

Warunek Cauchy'ego

Twierdzenie 3.6. Ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia tak zwany warunek Cauchy'ego:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall m, n \geq n_0 \quad |a_m - a_n| < \epsilon.$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy dla ciągów rzeczywistych. Rozszerzenie go na ciągi zespolone jest już prostym ćwiczeniem. Dowód ma dwie części: ze zbieżności warunek Cauchy'ego (część „ $\Rightarrow$ ”), oraz z warunku Cauchy'ego zbieżność (część „ $\Leftarrow$ ”).

$\Rightarrow$ Zakładamy, że $\{a_n\}$ jest zbieżny do a . Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolne. Wtedy, z definicji zbieżności $\exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq n_0$ zachodzi $|a_n - a| < \epsilon/2$. Weźmy $m, n \geq n_0$, wtedy $|a_m - a| < \epsilon/2$ i $|a_n - a| < \epsilon/2$, a więc

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Warunek Cauchy'ego jest więc spełniony.

$\Leftarrow$ Załóżmy, że ciąg $\{a_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Zauważmy, że w takim razie ciąg $\{a_n\}$ musi być ograniczony: niech $\epsilon = 1$, a więc

$$\exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall m, n \geq n_0 \quad |a_m - a_n| < 1.$$

Czyli, biorąc $n = n_0$ otrzymujemy dla każdego $m \geq n_0$ $|a_m - a_{n_0}| < 1 \Rightarrow |a_m| < |a_{n_0}| + 1$. Niech

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, |a_{n_0}| + 1\}.$$

Wtedy, dla każdego $n \in \mathbf{N}$ mamy $|a_n| \leq M$.

Utwórzmy dwa pomocnicze ciągi

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \inf\{a_n : n \geq k\} & \leftarrow & \text{ciąg niemalejący,} \\ \beta_k &= \sup\{a_n : n \geq k\} & \leftarrow & \text{ciąg nierosnący,} \end{aligned}$$

oraz niech

$$\begin{aligned} A &= \sup\{\alpha_k : k \in \mathbf{N}\}, \\ B &= \inf\{\beta_k : k \in \mathbf{N}\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Wszystkie kresy istnieją, gdyż ciąg jest ograniczony. W pierwszym kroku pokażemy, że $A \leq B$. Ta nierówność jest prawdziwa dla wszystkich ciągów. Załóżmy nie wprost, że $A > B$, i pokażemy, że takie założenie prowadzi do sprzeczności, czyli musi być fałszywe. Jeżeli $A > B$ to niech $0 < \epsilon < \frac{A-B}{2}$. Z definicji kresów znajdziemy $k_1 \in \mathbf{N}$ takie, że

$$\alpha_{k_1} > A - \epsilon.$$

Skoro ciąg $\{\alpha_k\}$ jest niemalejący, to powyższa nierówność zachodzi dla wszystkich $k \geq k_1$. Podobnie, musi istnieć $k_2 \in \mathbf{N}$ takie, że

$$\beta_{k_2} < B + \epsilon, \quad \Rightarrow \quad \forall k \geq k_2 \quad \beta_k < B + \epsilon.$$

Niech teraz $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$. Mamy

$$A - \epsilon < \alpha_{k_0} \leq \beta_{k_0} < B + \epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{A-B}{2} < \epsilon,$$

czyli sprzeczność. Musi więc zachodzić

$$A \leq B.$$

Tak, jak już wspomnieliśmy, powyższa nierówność wynika jedynie z definicji liczb A i B i jest prawdziwa dla wszystkich ciągów, a nie tylko tych spełniających warunek Cauchy'ego. Teraz pokażemy, że dla ciągów spełniających

warunek Cauchy'ego zachodzi równość: $A = B$. Będziemy znowu rozumowali nie wprost. Niech $A < B$, i niech $0 < \epsilon < \frac{A-B}{2}$. Istnieje $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że dla wszystkich $m, n \geq n_0$ zachodzi $|a_m - a_n| < \epsilon$, w szczególności

$$\forall n \geq n_0 \quad |a_{n_0} - a_n| < \epsilon \Rightarrow a_{n_0} - \epsilon < a_n < a_{n_0} + \epsilon.$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} \alpha_{n_0} = \inf\{a_n : n \geq n_0\} &\geq a_{n_0} - \epsilon \Rightarrow A \geq a_{n_0} - \epsilon \\ \beta_{n_0} = \sup\{a_n : n \geq n_0\} &\leq a_{n_0} + \epsilon \Rightarrow B \leq a_{n_0} + \epsilon. \end{aligned}$$

Mamy więc

$$B - A \leq a_{n_0} + \epsilon - a_{n_0} + \epsilon = 2\epsilon \Rightarrow \epsilon \geq \frac{B - A}{2},$$

czyli sprzeczność. Musimy więc mieć równość $A = B$. Niech więc $g = A = B$. Z definicji kresów mamy

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |g - \alpha_n| < \epsilon \quad \text{oraz} \quad |g - \beta_n| < \epsilon.$$

Biorąc pod uwagę, że ciąg $\{\alpha_n\}$ jest słabo rosnący a $\{\beta_n\}$ słabo malejący powyższe nierówności oznaczają odpowiednio

$$g - \epsilon < \alpha_n \leq g \quad \text{oraz} \quad g \leq \beta_n < g + \epsilon.$$

W takim razie, dla wszystkich $n \geq n_0$ skoro $\alpha_n \leq a_n \leq \beta_n$ to $g - \epsilon < \alpha_n \leq a_n \leq \beta_n < g + \epsilon$, czyli $|a_n - g| < \epsilon$. $\square$

Uwaga: Stałe A i B zdefiniowane w powyższym dowodzie mają sens dla dowolnego ciągu ograniczonego $\{a_n\}$. Stałe te noszą nazwy granicy dolnej i górnej ciągu $\{a_n\}$. Wkrótce omówimy dokładniej te pojęcia.

Przykłady: (a) Ciąg $a_n = (-1)^n$ nie spełnia warunku Cauchy'ego. Niech $\epsilon = 1$. Wtedy $|a_n - a_{n+1}| = 2 > \epsilon$ dla wszystkich n .

(b) Ciąg $a_n = \frac{n-1}{n}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Sprawdźmy to: niech $m > n$, wtedy

$$|a_m - a_n| = \frac{m-1}{m} - \frac{n-1}{n} = \frac{(m-1)n - (n-1)m}{m \cdot n} = \frac{m-n}{m \cdot n} < \frac{m}{m \cdot n} = \frac{1}{n}.$$

Widać więc, że wystarczy wziąć $n_0 = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil + 1$, wtedy jeżeli $m, n \geq n_0$ to $\frac{1}{m}, \frac{1}{n} < \epsilon$ i warunek Cauchy'ego jest spełniony.

Twierdzenie 3.7. (i) *Każdy ciąg monotoniczny ograniczony ma granicę (właściwą).*

(ii) *Każdy ciąg monotoniczny nieograniczony ma granicę niewłaściwą.*

Uwaga: Wystarczy monotoniczność słaba, i tylko od pewnego miejsca.

Dowód. (i) Załóżmy, że $\{a_n\}$ jest słabo rosnący i ograniczony, to znaczy

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{oraz} \quad |a_n| \leq M \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots$$

Istnieje więc kres górny

$$g = \sup\{a_n : n = 1, 2, \dots\}.$$

Z definicji kresu mamy

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n \leq g \quad \text{oraz} \quad \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad a_{n_0} > g - \epsilon.$$

Skoro $\{a_n\}$ jest słabo rosnący, to $\forall n \geq n_0$ mamy $a_n \geq a_{n_0} > g - \epsilon$, czyli $g - \epsilon < a_n \leq g \Rightarrow |a_n - g| < \epsilon$.

(ii) Załóżmy, że ciąg $\{a_n\}$ jest słabo rosnący i nie jest ograniczony, czyli nie jest ograniczony od góry (od dołu jest ograniczony przez a_1). Niech dana będzie liczba M . Skoro ciąg $\{a_n\}$ nie jest ograniczony od góry, to istnieje $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że $a_{n_0} > M$. Skoro ciąg jest słabo rosnący, to

$$\forall n \geq n_0 \quad a_n \geq a_{n_0} > M.$$

Spełniony jest więc warunek z definicji granicy niewłaściwej $+\infty$. Przypadek ciągów słabo malejących można udowodnić podobnie. $\square$

Uwaga: Zauważmy, że przy okazji udowodniliśmy, że jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący i ograniczony, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\},$$

a jeżeli jest malejący i ograniczony, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}.$$

Dwumian Newtona

Przypomnijmy następujący wzór, tak zwany wzór dwumianowy Newtona. Dla $n \in \mathbf{N}$ silnia n to iloczyn wszystkich liczb naturalnych $k \leq n$: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$. Przyjmujemy też oznaczenie $0! = 1$. Dla $0 \leq k \leq n$ wprowadzamy tak zwany współczynnik dwumianowy Newtona

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k, n \in \mathbf{Z}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Następujący wzór nazywa się wzorem dwumianowym Newtona. Można go udowodnić na przykład przy pomocy indukcji. Jest to jeden ze wzorów, z którego będziemy stale korzystać, więc warto go dobrze zapamiętać. Niech $a, b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, wtedy

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} a^n b^0 \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \end{aligned}$$

Ostatnia równość to po prostu rozwinięcie symbolu sumowania Σ . Symbolu tego będziemy stale używać. Oznacza on po prostu sumę wyrażenia dla wszystkich wartości parametru k z opisanego na symbolu zakresu, w tym wypadku $k = 0, 1, \dots, n$.

Liczba e

Rozważmy następujący ciąg: $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Pokażemy, że ten ciąg jest rosnący i ograniczony, a więc zbieżny. Zauważmy, że ani to, że $\{a_n\}$ jest rosnący ani to, że jest ograniczony nie jest oczywiste: co prawda potęga rośnie, ale podstawa maleje do 1. Na przykład

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \quad a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,25, \quad a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2,370\dots, \\ a_4 &= \left(\frac{5}{4}\right)^4 = 2,441\dots, \quad a_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^5 = 2,488\dots \end{aligned}$$

Pokażemy teraz, że ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący. Zauważmy następującą równość dla $k = 0, 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \frac{(n-k+1) \cdot (n-k+2) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot (n)}{k! \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n \cdot n} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-(k-1)}{n} \\ &= \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Wyrazy ciągu $\{a_n\}$ rozwiniemy teraz korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, a następnie zastosujemy powyższą równość.

$$\begin{aligned} a_n &= \binom{n}{0} \left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1} \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \binom{n}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots \\ &\quad \dots + \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k + \dots + \binom{n}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \quad (3.3) \\ &\quad \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Zauważmy, że w takiej postaci w jakiej zapisaliśmy go powyżej, wyraz a_n wraz ze wzrostem n zawiera coraz więcej dodatnich składników, a także każdy ze składników robi się coraz większy (z wyjątkiem 2 pierwszych składników, $1 + 1$, które nie zmieniają się). Jeżeli wyrazy ciągu zapiszemy więc w tej postaci, to widać, że ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący. Dodatkowo zauważmy, że możemy oszacować a_n od góry

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}. \quad (3.4)$$

Pierwszą nierówność otrzymujemy z postaci (3.3), poprzez pominięcie czynników mniejszych niż 1, natomiast drugą nierówność otrzymujemy poprzez zastąpienie czynników większych niż 2 w mianownikach przez 2. Mianowniki są więc mniejsze, czyli ułamki większe. Pozostaje nam skorzystać ze wzoru na sumę postępu geometrycznego: dla $q \neq 1$, oraz $l \in \mathbf{N}$ mamy

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{l-1} = \frac{1 - q^l}{1 - q}. \quad (3.5)$$

Równość powyższą można udowodnić na przykład indukcyjnie. Jest to jedna z tych równości, które trzeba zawsze pamiętać, i będzie pojawiała się wielokrotnie. Suma z prawej strony naszego oszacowania (3.4) to właśnie suma postępu geometrycznego, z $q = \frac{1}{2}$, oraz z jedną dodatkową 1 z przodu. Mamy więc

$$a_n < 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3.$$

Pokazaliśmy więc, że ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący i ograniczony, a więc zbieżny. Granicę tego ciągu nazywamy e

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Wiemy też z oszacowań, że $2 < e < 3$. e to ważna liczba, która będzie pojawiała się na naszym wykładzie stale, głównie jako podstawa logarytmów i funkcji wykładniczej.

Twierdzenie 3.8 (o 3 ciągach). *Załóżmy, że mamy 3 ciągi spełniające nierówności*

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.6)$$

oraz że skrajne ciągi $\{a_n\}$ oraz $\{c_n\}$ są zbieżne do wspólnej granicy

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

Wtedy ciąg $\{b_n\}$ też jest zbieżny, do tej samej granicy

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Uwaga: Wystarczy, że ciągi spełniają nierówności (3.6) od pewnego $n_0 \in \mathbf{N}$.

Dowód twierdzenia. Niech $\epsilon > 0$ i niech $n_1 \in \mathbf{N}$ będzie takie, że dla $n \geq n_1$

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad a_n > a - \epsilon,$$

oraz niech $n_2 \in \mathbf{N}$ będzie takie, że dla $n \geq n_2$ zachodzi

$$|c_n - a| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad c_n < a + \epsilon.$$

Istnienie takich n_1 i n_2 wynika ze zbieżności ciągów $\{a_n\}$ i $\{c_n\}$ do wspólnej granicy a . Wtedy, dla $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ mamy

$$a - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \epsilon \quad \Rightarrow \quad |b_n - a| < \epsilon. \quad (3.7)$$

Zauważmy jeszcze, że jeżeli nierówności (3.6) zachodzą tylko od pewnego miejsca, na przykład dla $n \geq k$, to wystarczy zmodyfikować definicję n_0 : niech $n_0 = \max\{n_1, n_2, k\}$, i nierówność (3.7) zachodzi. W ten sposób uzasadniliśmy uwagę poniżej twierdzenia. $\square$

Przykłady: (a) Niech $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. Skorzystamy z twierdzenia o 3 ciągach, a w tym celu wykonamy kilka przekształceń i oszacowań. Widzieliśmy już wcześniej, jak przekształcić różnicę dwóch pierwiastków

$$\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

Następnie

$$1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + 1} \leq a_n \leq \frac{1}{2}.$$

Dwa skrajne ciągi mają wspólną granicę $\frac{1}{2}$, więc $a_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

(b) Niech $a > 1$ i $a_n = \sqrt[n]{a}$. Wyrazy ciągu są pierwiastkami coraz wyższego rzędu z liczby większej od 1. Zauważmy od razu, że taki ciąg musi mieć granicę, gdyż jest malejący, i ograniczony od dołu przez 1. Ta obserwacja nie będzie nam potrzebna, gdyż skorzystamy z twierdzenia o 3 ciągach. Po pierwsze, skoro $a > 1$ to także $a_n > 1$ dla wszystkich n . Niech $\epsilon_n = a_n - 1 > 0$. Skorzystamy z nierówności (3.1), i otrzymujemy

$$a = (1 + \epsilon_n)^n \geq 1 + n\epsilon_n \quad \Rightarrow \quad 0 < \epsilon_n \leq \frac{a - 1}{n}.$$

Skrajne ciągi zbiegają do 0, a więc także $\epsilon_n \rightarrow 0$ czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

(c) Niech $a_n = \sqrt[n]{n}$. Podobnie jak w poprzednim przykładzie zapiszmy $a_n = 1 + \epsilon_n$, a więc $\epsilon_n > 0$. Skorzystamy teraz z innej nierówności prawdziwej dla $\epsilon > 0$ i $n \geq 2$

$$(1 + \epsilon)^n > \binom{n}{2} \epsilon^2 = \frac{n(n-1)}{2} \epsilon^2.$$

Nierówność powyższą można udowodnić korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona. Korzystając z niej, otrzymujemy dla $n \geq 2$

$$n = (1 + \epsilon_n)^n > \frac{n(n-1)}{2} \epsilon_n^2 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_n^2 < \frac{2n}{n(n-1)} \quad \Rightarrow \quad 0 < \epsilon_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Prawy skrajny ciąg zbiega do 0. Można to pokazać z definicji, a można skorzystać z ogólnego twierdzenia o zbieżności pierwiastków, które udowodnimy poniżej. Korzystając z 3 ciągów ponownie pokazaliśmy, że $\epsilon_n \rightarrow 0$, a więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Twierdzenie 3.9. Niech $a_n \rightarrow a$, $a_n \geq 0$ oraz $m \in \mathbf{N}$. Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a}.$$

Dowód. Rozpatrzmy 2 przypadki: $a = 0$ i $a > 0$. Jeżeli $a = 0$ to niech $\epsilon > 0$ będzie dowolne, i niech $\tilde{\epsilon} = \epsilon^m$. Z definicji granicy

$$\exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq a_n < \tilde{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \sqrt[m]{a_n} < \epsilon.$$

W przypadku $a = 0$ twierdzenie jest więc udowodnione. Rozpatrzmy teraz pozostały przypadek, czyli niech $a > 0$. Wykorzystamy następującą równość, dla $\alpha, \beta \geq 0$, $m \in \mathbf{N}$

$$(\alpha - \beta)(\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{m-2} + \beta^{m-1}) = \alpha^m - \beta^m.$$

Nierówność tą można udowodnić bezpośrednio (na przykład indukcyjnie), albo można ją wywnioskować ze wzoru na sumę postępu geometrycznego (3.5). Mamy więc

$$\begin{aligned} |\sqrt[m]{a_n} - \sqrt[m]{a}| &= \\ &= \frac{|a_n - a|}{((\sqrt[m]{a_n})^{m-1} + (\sqrt[m]{a_n})^{m-2}\sqrt[m]{a} + \dots + (\sqrt[m]{a})^{m-1})} \leq \frac{|a_n - a|}{(\sqrt[m]{a})^{m-1}}. \end{aligned}$$

Wystarczy teraz, podobnie jak w poprzednim przypadku wziąć $\tilde{\epsilon} = (\sqrt[m]{a})^{m-1}\epsilon$ i mamy

$$|a_n - a| < \tilde{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad |\sqrt[m]{a_n} - \sqrt[m]{a}| < \epsilon.$$

□

Zauważmy, że powyższe twierdzenie pozwala nam „wejść z granicą pod” dowolną potęgę wymierną, jeżeli tylko a_n i a są takie, że potęgę można zastosować

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{p}{q}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{\frac{p}{q}}, \quad p \in \mathbf{Z}, \quad q \in \mathbf{N}.$$

Przykład: Niech $a_1 = \sqrt{2}$ i niech $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ dla $n \geq 1$. Rozważaliśmy już ten przykład, i pokazaliśmy, że $\{a_n\}$ jest rosnący i ograniczony, czyli zbieżny. Wykorzystamy to teraz do znalezienia jego granicy

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt{2 + g}.$$

Widzimy więc, że granica g musi spełniać równanie kwadratowe $g^2 - g - 2 = 0$. Równanie to ma dwa pierwiastki $g = -1$ i $g = 2$. Granica nie może być

liczbą ujemną, bo ciąg składa się z liczb dodatnich, więc pozostaje jedyna możliwość: $g = 2$.

Uwaga: Skorzystaliśmy z następującego faktu: jeżeli $a_n \rightarrow a$ oraz $a_n \geq 0$ to $a \geq 0$. Fakt ten można sformułować ogólniej: jeżeli $a_n \rightarrow a$ i $b_n \rightarrow b$ oraz $a_n \leq b_n$ (przynajmniej od pewnego miejsca), to $a \leq b$. Pozostawiamy to jako ćwiczenie.

Podciągi

Definicja 3.10. *Podciągiem ciągu $\{a_n\}$ nazywamy ciąg postaci $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, gdzie $\{n_k\}$ jest ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych.*

Uwaga: W definicji istotne jest to, żeby ciąg indeksów $\{n_k\}$ był ściśle rosnący. Innymi słowy, $a_1, a_5, a_6, a_{17}, \dots$ może być podciągiem ciągu $\{a_n\}$, natomiast $a_1, a_1, a_5, a_2, \dots$ nie jest podciągiem. Zauważmy też, że zgodnie z definicją sam ciąg $\{a_n\}$ jest swoim własnym podciągiem, wystarczy wziąć $n_k = k$. Definicja podciągu sprowadza się do wybrania z naszego ciągu jedynie niektórych wyrazów, z tym, że wybierać musimy na każdym kroku spośród wyrazów dalszych, niż już wybrane.

Przykład: Ciąg $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$ jest podciągiem ciągu $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$. Tutaj $a_n = \frac{1}{n}$ oraz $n_k = k^2$, a więc $a_{n_k} = \frac{1}{k^2}$.

Twierdzenie 3.11. *Każdy podciąg ciągu zbieżnego też jest zbieżny, do tej samej granicy.*

Dowód. Niech będzie dany podciąg ciągu $\{a_n\}$, z ciągiem indeksów $\{n_k\}$. Niech $\epsilon > 0$, i niech $n_0 \in \mathbf{N}$ będzie takie, że dla $n \geq n_0$ zachodzi $|a_n - g| < \epsilon$. Niech

$$k_0 = \min\{k \in \mathbf{N} : n_k \geq n_0\}.$$

Wtedy, jeżeli $k \geq k_0$ to $n_k \geq n_{k_0} \geq n_0$, i $|a_{n_k} - g| < \epsilon$. □

Przykład: Niech $l \in \mathbf{N}$ oraz

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{l}\right)^n.$$

Niech $n_l = lk$. Jest to ciąg ściśle rosnący, oraz

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{ln}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{ln}\right)^{ln}\right)^{\frac{1}{l}},$$

czyli, jeśli $b_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ (ciąg określający liczbę e), to $a_k = \sqrt[k]{b_{n_k}}$. Wiemy, że $b_n \rightarrow e$, a więc

$$b_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e \quad \Rightarrow \quad \sqrt[k]{b_{n_k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{e},$$

czyli mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\frac{1}{e}}.$$

Twierdzenie 3.12 (Bolzano-Weierstrassa). *Z każdego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny*

Dowód. Niech ciąg $\{a_n\}$ będzie ograniczony. Przypomnijmy konstrukcję z Twierdzenia 3.6, dotyczącego warunku Cauchy'ego.

$$\alpha_k = \inf\{a_n : n \geq k\}, \quad A = \sup\{\alpha_k : k \geq 1\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k.$$

Wiemy, że kresy istnieją, bo ciąg $\{a_n\}$ jest z założenia ograniczony. Wiemy też, że A jest kresem górnym zbioru wartości ciągu $\{\alpha_k\}$, a także granicą tego ciągu, gdyż ciąg ten jest rosnący, być może słabo. Pokażemy teraz, że istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ zbieżny do A . Konstrukcja tego podciągu jest następująca. Niech a_{n_1} będzie elementem ciągu $\{a_n\}$ odległym od α_1 o mniej niż $\frac{1}{2}$. Wiemy, że taki element musi istnieć, z definicji kresu. Mamy więc

$$\alpha_1 \leq a_{n_1} < \alpha_1 + \frac{1}{2}.$$

Dalej konstrukcja podciągu będzie indukcyjna. Następnego elementu podciągu musimy szukać wśród a_n 'ów o numerach większych niż n_1 , więc niech a_{n_2} elementem ciągu $\{a_n\}$, $n \geq n_1$, odległym od α_{n_1+1} o mniej niż $\frac{1}{4}$. Mamy więc $n_2 > n_1$ oraz

$$\alpha_{n_1+1} \leq a_{n_2} < \alpha_{n_1+1} + \frac{1}{2^2}.$$

Opiszemy teraz ogólny krok indukcyjnej definicji. Załóżmy, że skonstruowaliśmy kawałek podciągu $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_m}$ taki, że $n_1 < n_2 < \dots < n_m$, oraz

$$\alpha_{n_l+1} \leq a_{n_{l+1}} < \alpha_{n_l+1} + \frac{1}{2^{l+1}}, \quad l = 1, 2, \dots, m-1.$$

Niech teraz następny indeks n_{m+1} będzie taki, że po pierwsze $n_{m+1} \geq n_m + 1$ (indeksy muszą ściśle rosnać), oraz

$$\alpha_{n_m+1} \leq a_{n_{m+1}} < \alpha_{n_m+1} + \frac{1}{2^{m+1}}.$$

Zauważmy, że taki wybór jest zawsze możliwy, ze względu na definicję ciągu $\{\alpha_k\}$ jako ciągu kresów. W ten sposób, indukcyjnie, zdefiniowaliśmy podciąg $\{a_{n_k}\}$, o własności

$$\alpha_{n_{k-1}+1} \leq a_{n_k} < \alpha_{n_{k-1}+1} + \frac{1}{2^k}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Po skrajnych stronach nierówności mamy ciągi zbieżne do A ($\{\alpha_{n_{k-1}+1}\}$ jest podciągiem ciągu $\{\alpha_n\}$ a $\frac{1}{2^k} \rightarrow 0$), więc z 3 ciągów otrzymujemy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = A.$$

□

Uwaga: Twierdzenie jest intuicyjnie jasne. Jeżeli ciąg jest ograniczony, to jego wyrazy (których jest nieskończenie wiele) muszą gdzieś się zagęszczać. Powyższy dowód stanowi sprecyzowanie tego stwierdzenia.

Definicja 3.13. Liczbę α nazywamy punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$ jeżeli istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ zbieżny do α .

Twierdzenie 3.14. α jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbf{N} \quad \exists n \geq n_0 \quad |a_n - \alpha| < \epsilon. \quad (3.8)$$

Innymi słowy, każde otoczenie punktu α zawiera wyrazy ciągu $\{a_n\}$ o dowolnie dalekich indeksach (w szczególności każde otoczenie punktu α zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$).

Dowód. Jeżeli α jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$ to z definicji istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ zbieżny do α . Niech więc $\epsilon > 0$, a k_0 będzie takie, że dla $k \geq k_0$ mamy $|a_{n_k} - \alpha| < \epsilon$. Jeżeli dane jest $n_0 \in \mathbf{N}$, to niech $k \geq k_0$ spełnia $n_k \geq n_0$. Takie k musi istnieć, bo ciąg indeksów $\{n_k\}$ jest rozbieżny do $+\infty$. Indeks n_k jest wymaganym indeksem w (3.8). Z drugiej strony, niech będzie spełniony warunek (3.8). Indukcyjnie konstruujemy podciąg $\{a_{n_k}\}$ zbieżny do α . Niech n_1 będzie numerem takiego elementu ciągu, który spełnia

$$|a_{n_1} - \alpha| < \frac{1}{2}.$$

Istnienie takiego elementu wynika z (3.8). Dalej, założymy, że mamy już skonstruowany ciąg rosnący indeksów $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ spełniający

$$|a_{n_l} - \alpha| < \frac{1}{2^l}, \quad l = 1, 2, \dots, k.$$

Niech n_{k+1} będzie indeksem elementu ciągu $\{a_n\}$ który spełnia

$$|a_{n_{k+1}} - \alpha| < \frac{1}{2^{k+1}},$$

oraz $n_{k+1} > n_k$. Istnienie takiego elementu wynika z (3.8). W ten sposób otrzymaliśmy podciąg $\{a_{n_k}\}$ spełniający

$$0 \leq |a_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Korzystając z 3 ciągów widzimy, że podciąg jest zbieżny do α , czyli α istotnie jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$. $\square$

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony, to zbiór jego punktów skupienia (który, zgodnie z twierdzeniem Bolzano-Weierstrassa jest niepusty) też jest ograniczony (ćwiczenie). Posiada więc kresy.

Definicja 3.15. *Kresy dolny i górny zbioru punktów skupienia nazywamy granicą dolną i górną ciągu $\{a_n\}$, i oznaczamy*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{granica dolna} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \quad \text{granica górna}.$$

Uwagi: (i) Granica dolna jest mniejsza lub równa od granicy górnej.

(ii) Zbiór punktów skupienia ciągu ograniczonego osiąga swoje kresy. Granica dolna jest więc najmniejszym punktem skupienia ciągu, a granica górna największym punktem skupienia ciągu ograniczonego.

(iii) Ciąg ograniczony jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy jego granice górna i dolna są równe. Innymi słowy, ciąg ograniczony jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ma dokładnie jeden punkt skupienia.

(iv) Stałe A i B które pojawiły się w (3.2) w dowodzie Twierdzenia 3.6 są odpowiednio granicami dolną i górną ciągu $\{a_n\}$.

Przykład: Niech $m \in \mathbf{N}$ będzie ustalona, i niech $a_n = (1 + \frac{m}{n})^n$. Pokażemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n = e^m.$$

Najpierw niech $0 \leq x < 1$, i niech $b_n = (1 + \frac{1}{n+x})^n$. Zauważmy, że mamy następujące oszacowanie

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+x}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

Prawy skrajny ciąg dąży do e , lewy skrajny, jak łatwo się przekonać też:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \cdot 1 = e. \quad (3.9)$$

Korzystając z 3 ciągów mamy więc, że $b_n \rightarrow e$. Ustalmy teraz $l = 0, \dots, m-1$, i niech $n_k = mk + l$. Zauważmy, że odpowiadający temu podciąg ciągu $\{a_n\}$ zbiega do e^m :

$$\begin{aligned} a_{n_k} &= \left(1 + \frac{m}{mk+l}\right)^{mk+l} = \left(1 + \frac{1}{k + \frac{l}{m}}\right)^{mk+l} \\ &= \left(\left(1 + \frac{1}{k + \frac{l}{m}}\right)^k\right)^m \cdot \left(1 + \frac{1}{k + \frac{l}{m}}\right)^l \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e^m, \end{aligned}$$

zgodnie z (3.9). Wszystkie powyższe podciągi mają więc tą samą granicę e^m . Każdy element ciągu $\{a_n\}$ należy do któregoś podciągu, i podciągów tych jest skończenie wiele. Wynika z tego, że $\{a_n\}$ jest zbieżny, i jego granicą jest e^m . Przekonajmy się o tym. Niech $\{n_k^l\}$ będzie ciągiem $n_k^l = mk + l$ dla $l = 0, 1, \dots, m-1$. Wiemy, że każdy podciąg $\{a_{n_k^l}\}$ zbiega do e^m , więc dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieją $k_0^l \in \mathbf{N}$ taki, że dla $k \geq k_0^l$ zachodzi

$$|a_{n_k^l} - e^m| < \epsilon.$$

Niech teraz $n_0 = \max\{mk_0^0, mk_0^1 + 1, \dots, mk_0^{m-1} + m - 1\}$. Jeżeli $n \geq n_0$, to n musi należeć do któregoś ciągu n_k^l i dodatkowo $k \geq k_0^l$. a_n spełnia więc $|a_n - e^m| < \epsilon$. Niech $m, k \in \mathbf{N}$. Jako prosty wniosek z powyższych obliczeń mamy

$$\left(1 + \frac{m}{k}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{m}{k \cdot n}\right)^{k \cdot n}\right)^{\frac{1}{k}} = (a_{kn})^{\frac{1}{k}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (e^m)^{\frac{1}{k}} = e^{\frac{m}{k}}.$$

Dla $p = \frac{m}{k}$, $m, k \in \mathbf{N}$ mamy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = e^p.$$

Powyższą równość można uogólnić najpierw na dowolne $p \in \mathbf{R}$, $p > 0$, a następnie na dowolne $p \in \mathbf{R}$. Zostawiamy to jako ćwiczenie

4 Szeregi

Szeregi to sumy nieskończone. Do ich definicji potrzebne jest pojęcie zbieżności. Sumy nieskończone nie są niczym dziwnym, występują w praktyce, na przykład kiedy chcemy obliczyć pola figur. Niech będzie dany ciąg $\{a_n\}$, i utwórzmy ciąg kolejnych sum

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$$

Definicja 4.1. Jeżeli ciąg $\{s_n\}$ ma granicę s to mówimy, że szereg (suma nieskończona) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, i że jego suma wynosi s . Piszemy $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ciąg $\{s_n\}$ nazywamy ciągiem sum częściowych szeregu $\sum a_n$, a jego elementy s_k sumami częściowymi szeregu. Jeżeli ciąg $\{s_n\}$ nie jest zbieżny, to mówimy, że szereg jest rozbieżny, a wyrażenie $\sum a_n$ jest tylko symbolem i nie ma interpretacji liczbowej.

Przykłady: (a) Niech $a_n = (\frac{2}{3})^n$. Wtedy

$$s_n = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3} \frac{1 - (\frac{2}{3})^n}{1 - \frac{2}{3}} = 2 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n$ jest więc zbieżny, i $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n = 2$ (jest to przykład tak zwanego szeregu geometrycznego). Skorzystaliśmy ze wzoru na sumę postępu geometrycznego (3.5)

(b) Niech $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Zauważmy, że $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Mamy więc

$$\begin{aligned} s_n &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ jest więc zbieżny, i jego suma wynosi 1.

(c) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ jest rozbieżny, bo $s_n = -1$ lub 0 , w zależności od tego, czy n jest parzyste czy nieparzyste.

Działania na szeregach

Twierdzenie działań na granicach przenosi się na szeregi:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) &= c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \end{aligned}$$

przy założeniu że szeregi po prawej stronie są zbieżne. Twierdzenie o granicy iloczynu czy ilorazu nie ma tu bezpośredniego zastosowania.

Twierdzenie 4.2. *Jeżeli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.*

Dowód. Jeżeli szereg jest zbieżny, to znaczy, że zbieżny jest jego ciąg sum częściowych $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Dla $n \geq 2$ $a_n = s_n - s_{n-1}$, a więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = 0.$$

□

Uwaga: Powyższe twierdzenie daje tak zwany warunek konieczny zbieżności szeregu. $\lim a_n = 0$ nie gwarantuje zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Twierdzenie przydaje się więc głównie, żeby pokazać rozbieżność.

Przykład: Niech $a_n = \frac{1}{n}$. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny. Jest to tak zwany szereg harmoniczny. Pokażemy, że ciąg sum częściowych nie jest ograniczony. Wystarczy pokazać podciąg ciągu $\{s_n\}$ rozbieżny do $+\infty$.

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right). \end{aligned}$$

W każdym kolejnym nawiasie mamy $2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$ składników, a każdy składnik jest $\geq \frac{1}{2^k}$. Suma każdego nawiasu jest więc większa od $2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} s_{2^n} &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{n \text{ razy}} = 1 + n \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Mamy więc $s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$, a więc ciąg sum częściowych $\{s_n\}$ nie jest ograniczony, a więc nie jest zbieżny.

Twierdzenie 4.3. *Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg sum częściowych $\{s_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego:*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall m, n \geq n_0 \quad |s_m - s_n| < \epsilon.$$

Warunek ten można przeformułować:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall m \geq n \geq n_0 \quad |a_n + a_{n+1} + \dots + a_m| < \epsilon.$$

Dowód. Twierdzenie wynika natychmiast z Twierdzenia 3.6 dla ciągów. $\square$

Przykład: Jeżeli $|r| < 1$ to szereg geometryczny $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ jest zbieżny. Niech $m \geq n \geq n_0$.

$$\begin{aligned} |a_n + a_{n+1} + \dots + a_m| &\leq |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_m| = |r^n| + |r^{n+1}| + \dots + |r^m| \\ &= |r|^n + |r|^{n+1} + \dots + |r|^m = |r|^n(1 + |r| + \dots + |r|^{m-n}) \\ &= |r|^n \cdot \frac{1 - |r|^{m-n+1}}{1 - |r|} < \frac{|r|^n}{1 - |r|} \leq \frac{|r|^{n_0}}{1 - |r|}. \end{aligned}$$

Ciąg $\frac{|r|^n}{1 - |r|}$ jest zbieżny do 0, więc wystarczy dobrać n_0 do zadanego ϵ .

Kryteria zbieżności

Badanie zbieżności szeregów w większości przypadków można sprowadzić do zastosowania jednego z następujących kilku kryteriów.

Twierdzenie 4.4 (kryterium porównawcze).

- (i) Jeżeli $|a_n| \leq b_n$ i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ też jest zbieżny.
- (ii) Jeżeli $0 \leq a_n \leq b_n$ i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ też jest rozbieżny.

Dowód. (i) Skoro $\sum b_n$ jest zbieżny, to ciąg jego sum częściowych spełnia warunek Cauchy'ego. Z drugiej strony mamy

$$\begin{aligned} |a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| &\leq |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+k}| \\ &\leq b_n + b_{n+1} + \dots + b_{n+k} = |b_n + b_{n+1} + \dots + b_{n+k}|. \end{aligned}$$

Ciąg sum częściowych szeregu $\sum a_n$ też spełnia więc warunek Cauchy'ego.

(ii) Szereg $\sum a_n$ ma wyrazy nieujemne, i jest rozbieżny, więc jego ciąg sum częściowych jest rosnący (może słabo), a skoro nie jest zbieżny, to nie jest ograniczony. Ciąg sum częściowych szeregu $\sum b_n$ ma wyrazy nie mniejsze, więc też nie jest ograniczony, a więc nie może być zbieżny. $\square$

Uwaga: Wystarcz, że oszacowania są spełnione tylko od pewnego miejsca.

Przykłady: (a) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$ jest zbieżny, bo

$$\frac{1}{n^2 + 2n} \leq \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

(b) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ jest rozbieżny, bo

$$\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n},$$

a szereg $\sum \frac{1}{2^n}$ jest rozbieżny. Zauważmy, że w tym przykładzie oszacowanie $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ nic nie daje.

Twierdzenie 4.5 (kryterium o zagęszczaniu). *Niech ciąg $\{a_n\}$ będzie dodatni i słabo malejący, $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0$. Wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ jest zbieżny.*

Powyższe kryterium nie rozstrzyga w sposób bezpośredni, czy dany szereg jest zbieżny, czy nie, ale pozwala sprowadzić badanie zbieżności jednego szeregu do badania zbieżności innego szeregu.

Dowód. Oznaczmy przez $\{s_n\}$ ciąg sum częściowych szeregu $\sum a_n$, a przez $\{s'_n\}$ ciąg sum częściowych szeregu $\sum 2^n a_{2^n}$. Ponieważ wyrazy obu szeregów są nieujemne, to oba ciągi sum częściowych są niemalejące. Pokażemy, używając odpowiednich szacowań, że ciągi te są równocześnie ograniczone lub nieograniczone. Mamy

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \\ s'_n &= 2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + 8 \cdot a_8 + \dots 2^n \cdot a_{2^n} \\ &= 2(a_2 + 2 \cdot a_4 + 4 \cdot a_8 + \dots + 2^{n-1} \cdot a_{2^n}). \end{aligned}$$

Zauważmy więc, że

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} s'_n &= a_2 + 2 \cdot a_4 + 4 \cdot a_8 + \dots + 2^{n-1} \cdot a_{2^n} \\ &\leq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2^{n-1}} + a_{2^n} \\ &= s_{2^n} \end{aligned}$$

Do sumy po lewej stronie dodaliśmy $a_1 \geq 0$, a każdy składnik sumy $2^{k-1} \cdot a_{2^k}$ zastąpiliśmy nie mniejszym wyrażeniem $a_{2^{k-1}+1} + \dots + a_{2^k}$, $k = 1, \dots, n$. Jeżeli ciąg $\{s_n\}$ jest ograniczony to ograniczony jest też ciąg $\{s'_n\}$.

Z drugiej strony zauważmy, że

$$\begin{aligned} s_{2^{n+1}-1} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2^{n+1}-1} \\ &\leq a_1 + 2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + \dots + 2^n \cdot a_{2^n} \\ &= a_1 + s'_n. \end{aligned}$$

Nierówność uzyskaliśmy zastępując sumy $a_{2^k} + a_{2^{k+1}} + \dots + a_{2^{k+1}-1}$ (2^k składników sumy) przez nie mniejsze wyrażenie $2^k \cdot a_{2^k}$, $k = 1, \dots, n$. Jeżeli ciąg $\{s'_n\}$ jest ograniczony, to z powyższej nierówności wynika, że podciąg $\{s_{2^{n+1}-1}\}$ ciągu $\{s_n\}$ też jest ograniczony. Ciąg $\{s_n\}$ jest niemalejący, i zawiera podciąg ograniczony, a więc cały musi być ograniczony (ćwiczenie). $\square$

Przykład: Rozpatrzmy teraz szeregi postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Jeżeli $p \leq 0$ to ciąg $\{\frac{1}{n^p}\}$ nie jest zbieżny do 0, a więc szereg nie może być zbieżny. Jeżeli $p > 0$ to ciąg $\{\frac{1}{n^p}\}$ jest dodatni i malejący, a więc spełnia założenia kryterium o zagęszczaniu. Zamiast szeregu $\sum \frac{1}{n^p}$ rozważmy więc szereg o wyrazach

$$2^n \frac{1}{(2^n)^p} = 2^n \frac{1}{2^{n \cdot p}} = \frac{1}{2^{n \cdot (p-1)}} = \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^n.$$

Szereg $\sum (\frac{1}{2^{p-1}})^n$ jest szeregiem geometrycznym. Jeżeli $p - 1 > 0$ to iloraz szeregu $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ i szereg jest zbieżny, natomiast jeżeli $p - 1 \leq 1$, to iloraz $\frac{1}{2^{p-1}} \geq 1$, i szereg nie jest zbieżny. Mamy więc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \leftarrow \quad \begin{cases} \text{zbieżny jeżeli } p > 1, \\ \text{rozbieżny jeżeli } p \leq 1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Zauważmy, że przypadek $p = 1$ zrobiliśmy już wcześniej. Szeregi tej postaci są bardzo przydatne. Jeżeli wyrazy jakiegoś badanego szeregu można w jakikolwiek sposób oszacować przez funkcję potęgową n , to powstały szereg możemy porównać z szeregami (4.1), których zbieżność jest rozstrzygnięta w zależności od p .

Twierdzenie 4.6 (kryterium d'Alemberta). *Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem o wyrazach różnych od 0. Wtedy*

- (i) jeżeli $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny,
- (ii) jeżeli $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny (obejmuje to też przypadek granicy niewłaściwej $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$).

Dowód. (i) Zauważmy, że skoro granica górna ciągu $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ jest mniejsza od 1, to istnieją $0 < c < 1$ oraz $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że dla $n \geq n_0$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq c,$$

w szczególności dla $k \geq 0$

$$\begin{aligned} |a_{n_0+k}| &= \left| \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0+k-1}} \right| \cdot \left| \frac{a_{n_0+k-1}}{a_{n_0+k-2}} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \right| \cdot |a_{n_0}| \\ &\leq |a_{n_0}| \cdot c^k = \frac{|a_{n_0}|}{c^{n_0}} \cdot c^{n_0+k}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Iloczyn pojawiający się w (4.2) nazywa się czasem *iloczynem teleskopowym*, gdyż wysuwamy bądź chowamy potrzebną ilość czynników. Ciąg $\{a_n\}$ spełnia więc (dla $n \geq n_0$) nierówność

$$|a_n| \leq \frac{|a_{n_0}|}{c^{n_0}} \cdot c^n, \quad 0 < c < 1,$$

czyli jest zbieżny z kryterium porównawczego.

(ii) Zauważmy, że skoro granica dolna ciągu $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ jest większa od 1 (a także jeżeli ciąg ten ma granicę niewłaściwą $+\infty$), to istnieją $c > 1$ i $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że dla $n \geq n_0$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq c.$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku, dla $k \geq 0$ mamy

$$|a_{n_0+k}| = \left| \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0+k-1}} \right| \cdot \left| \frac{a_{n_0+k-1}}{a_{n_0+k-2}} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \right| \cdot |a_{n_0}| \geq |a_{n_0}| \cdot c^k \geq |a_{n_0}|,$$

czyli ciąg $\{a_n\}$ nie jest zbieżny do 0. Szereg $\sum a_n$ musi więc być rozbieżny. $\square$

Kryterium d'Alemberta pozostawia wiele przypadków nierozstrzygniętych. Na przykład dla szeregów postaci $\sum \frac{1}{n^p}$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \right)^p = 1.$$

Ten rodzaj szeregów nie jest objęty ani przez (i) ani przez (ii) przypadek kryterium d'Alemberta. Istotnie, jak wiemy szeregi tego rodzaju mogą być zbieżne lub rozbieżne, w zależności od parametru p .

Twierdzenie 4.7 (kryterium Cauchy'ego). *Niech dany będzie ciąg $\{a_n\}$ i niech*

$$g = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \quad \text{granica właściwa lub niewłaściwa.}$$

Wtedy

(i) jeżeli $g < 1$ to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny,

(ii) jeżeli $g > 1$ to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny (obejmuje to także przypadek granicy górnej niewłaściwej $g = +\infty$).

Dowód. (i) Podobnie jak w przypadku kryterium d'Alemberta, istnieją $0 < c < 1$ i $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że dla $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq c \quad \Rightarrow \quad |a_n| \leq c^n,$$

czyli z kryterium porównawczego szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

(ii) Jeżeli $g > 1$, to istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ taki, że $|a_{n_k}| \geq 1$. Ciąg $\{a_n\}$ nie może więc być zbieżny do 0, a więc szereg $\sum a_n$ nie jest zbieżny, $\square$

Uwagi: (i) Podobnie jak w przypadku kryterium d'Alemberta kryterium Cauchy'ego pozostawia nierozstrzygnięty przypadek $g = 1$. W takim przypadku dla różnych szeregów może być różnie.

(ii) Oba kryteria mają zastosowanie dla szeregów o wyrazach zespolonych. Wartość bezwzględna jest wtedy modułem liczby zespolonej.

Przykład: Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Mamy $a_n = \frac{1}{n!}$, a więc

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Korzystając z kryterium d'Alemberta otrzymujemy, że szereg $\sum \frac{1}{n!}$ jest zbieżny. Udowodnimy teraz, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e. \quad (4.3)$$

Przypomnijmy, że liczba e jest granicą

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Dowodząc istnienia tej granicy pokazaliśmy w (3.4), że

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = s_n,$$

gdzie $\{s_n\}$ jest ciągiem sum częściowych szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Przechodząc do granicy po n po obu stronach nierówności otrzymujemy

$$e \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \quad (4.4)$$

Z drugiej strony, ustalmy $k \in \mathbf{N}$ i niech $n \geq k$. Wtedy z rozwinięcia (3.3) (ucinając rozwinięcie po k -tym wyrazie) mamy

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy względem n po obu stronach nierówności (k pozostawiając ustalone) otrzymujemy

$$e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} = s_k,$$

dla każdego $k \in \mathbf{N}$. Teraz przechodząc do granicy po k (lewa strona jest stała) otrzymujemy

$$e \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

co razem z (4.4) daje (4.3).

Szeregi zbieżne absolutnie

Definicja 4.8. *Jeżeli szereg $\sum |a_n|$ jest zbieżny, to mówimy, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny absolutnie. Jeżeli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, ale nie jest zbieżny absolutnie (to znaczy szereg $\sum |a_n|$ nie jest zbieżny), to mówimy, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny warunkowo.*

Uwagi: (i) Jeżeli szereg jest zbieżny absolutnie to jest też zbieżny w zwykłym sensie. Wynika to z warunku Cauchy'ego:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_m|.$$

Jeżeli $\sum |a_n|$ jest zbieżny, to spełnia warunek Cauchy'ego, a więc $\sum a_n$ też spełnia warunek Cauchy'ego, czyli też jest zbieżny. Zbieżność absolutna jest to więc szczególny rodzaj zbieżności.

(ii) Jeżeli wyrazy szeregu $\sum a_n$ nie zmieniają znaku, to zbieżność absolutna wynika ze zbieżności zwykłej, i oba rodzaje zbieżności są równoważne. Zbieżność absolutna jest więc istotna dla szeregów których wyrazy zmieniają znak.

(iii) Zauważmy, że wszystkie kryteria zbieżności poznane omawiane dotychczas dotyczą zbieżności absolutnej. Żadne z tych kryteriów nie umożliwia

stwierdzenia zbieżności warunkowej.

(iv) Zbieżność absolutna jest ważna – tylko dla szeregów zbieżnych absolutnie zbieżność i suma nie zależą od kolejności sumowania i rozstawienia nawiasów.

Szeregi naprzemienne

Mówimy, że szereg $\sum a_n$ jest naprzemienny jeżeli jego wyrazy na przemian zmieniają znak, to znaczy $a_n = (-1)^n \cdot b_n$ i $b_n \geq 0$ lub $b_n \leq 0$ dla wszystkich n .

Twierdzenie 4.9 (kryterium Leibniza). *Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest malejący (słabo) i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, to szereg naprzemienny*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

jest zbieżny.

Dowód. Niech $s_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + \pm a_n$ będzie ciągiem sum częściowych. Zauważmy, że podciąg o numerach parzystych s_{2n} jest rosnący:

$$s_{2(n+1)} = s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq s_{2n},$$

a podciąg o numerach nieparzystych s_{2n+1} malejący:

$$s_{2(n+1)+1} = s_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} = s_{2n+1} - (a_{2n+2} - a_{2n+3}) \leq s_{2n+1}.$$

Zauważmy, że podciąg s_{2n} (który jest rosnący) jest ograniczony od góry:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{2n} \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-1} - a_{2n}) \leq a_1, \end{aligned}$$

a podciąg s_{2n+1} (który jest malejący) jest ograniczony od dołu

$$\begin{aligned} s_{2n+1} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{2n} + a_{2n+1} \\ &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + a_{2n+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Oba podciągi są więc zbieżne. Niech $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}$. Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = s + 0 = s.$$

Oba podciągi mają więc wspólną granicę. Ciąg $\{s_n\}$ rozkłada się więc na 2 podciągi, wyrazy o numerach parzystych i wyrazy o numerach nieparzystych.

Każdy element ciągu $\{s_n\}$ należy do jednego z dwóch podciągów, i oba podciągi mają wspólną granicę s . Wynika z tego, że cały ciąg $\{s_n\}$ jest zbieżny do s . Zapiszmy to rozumowanie. Niech $\epsilon > 0$. Z tego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = s$ wynika, że

$$\exists k_1 \in \mathbf{N} \quad \forall k \geq k_1 \quad |s_{2k} - s| < \epsilon,$$

a z tego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = s$ mamy

$$\exists k_2 \in \mathbf{N} \quad \forall k \geq k_2 \quad |s_{2k+1} - s| < \epsilon.$$

Niech $n_0 = \max\{2k_1, 2k_2 + 1\}$. Wtedy, jeżeli $n \geq n_0$ to $n = 2k$, $k \geq k_1$ lub $n = 2k + 1$, $k \geq k_2$, w zależności od parzystości n . W obu przypadkach

$$|s_n - s| < \epsilon.$$

□

Uwaga: Zauważmy, że z dowodu wynika też oszacowanie wartości sumy. Dla dowolnych $k, l \in \mathbf{N}$

$$s_{2l} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \leq s_{2k+1}.$$

Suma jest większa od każdej parzystej sumy częściowej, a mniejsza od każdej nieparzystej. Odnosi się to do szeregów naprzemiennych których wyrazy parzyste są ≤ 0 a nieparzyste ≥ 0 .

Przykład: Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ jest zbieżny, ale nie absolutnie. W niedalekiej przyszłości przekonamy się, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2.$$

Szeregi potęgowe

Definicja 4.10. Szeregiem potęgowym nazywamy szereg postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, gdzie ciąg współczynników $\{a_n\}$ oraz liczba x mogą być rzeczywiste lub zespolone.

Uwagi: (i) Szereg potęgowy, dla ustalonego ciągu $\{a_n\}$ może być zbieżny lub nie, w zależności od liczby x . Zawsze jest zbieżny dla $x = 0$.

(ii) W tych punktach x , w których szereg potęgowy jest zbieżny definiuje on funkcję:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Funkcje, będące sumami zbieżnych szeregów potęgowych są bardzo ważne. Zobaczymy, że praktycznie każda funkcja ma tę postać, w szczególności wszystkie funkcje elementarne można zapisać w ten sposób (mówi się czasem, że można je „rozwinąć w szereg potęgowy”).

(iii) Oczywiście, każdy szereg liczbowy można zapisać w postaci szeregu potęgowego, z odpowiednio dobranymi współczynnikami. Określenie „szereg potęgowy” odnosi się więc do sposobu zapisu szeregu liczbowego.

(iv) W dalszym ciągu skoncentrujemy się na szeregach o wyrazach rzeczywistych.

Twierdzenie 4.11. Szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest albo zbieżny absolutnie dla każdego $x \in \mathbf{R}$, albo istnieje liczba $R \geq 0$ taka, że

(i) dla $x \in (-R, R)$ szereg jest zbieżny absolutnie,

(ii) dla $x \notin [-R, R]$ szereg jest rozbieżny.

Zbiór tych x dla których szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny ma więc postać przedziału, zawierającego jeden lub oba końce albo bez końców (może to być cała prosta $\mathbf{R}$). Zbiór ten nazywamy „przedziałem zbieżności szeregu”. Liczbę R nazywamy „promieniem zbieżności” (w przypadku gdy przedziałem zbieżności jest $(-\infty, \infty)$, to mówimy, że promień zbieżności jest nieskończony).

Uwaga: Na końcach przedziału zbieżności może być różnie. Na przykład, szereg $\sum x^n$ ma przedział zbieżności $(-1, 1)$, szereg $\sum \frac{1}{n} x^n$ ma przedział zbieżności $[-1, 1)$, natomiast szereg $\sum \frac{1}{n^2} x^n$ przedział zbieżności $[-1, 1]$.

Dowód twierdzenia. Jeżeli dla $x_0 \in \mathbf{R}$ szereg $\sum a_n x_0^n$ jest zbieżny, to ciąg $\{a_n x_0^n\}$ jest zbieżny do 0, a więc w szczególności jest ograniczony:

$$\exists M \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad |a_n x_0^n| \leq M.$$

Jeżeli $|x| < |x_0|$ to niech $q = \frac{|x|}{|x_0|} < 1$. Mamy wtedy

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left(\frac{|x|}{|x_0|} \right)^n \leq M \cdot q^n.$$

Szereg geometryczny o wyrazach q^n jest zbieżny, gdyż $0 \leq q < 1$. Z kryterium porównawczego szereg $\sum a_n x^n$ jest więc zbieżny absolutnie. Niech

$$A = \left\{ |x| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ jest zbieżny, } x \in \mathbf{R} \right\}.$$

Jeżeli A nie jest ograniczony, to szereg jest zbieżny absolutnie dla każdego $x \in \mathbf{R}$. Dla każdego $x \in \mathbf{R}$ znajdziemy bowiem x_0 takie, że $|x_0| > |x|$ oraz szereg $\sum a_n x_0^n$ jest zbieżny. Jeżeli A jest ograniczony, to niech

$$R = \sup A.$$

Tak zdefiniowane R spełnia warunki twierdzenia. Jeżeli bowiem $|x| < R$, to znajdziemy x_0 takie, że $|x_0| > |x|$, i szereg $\sum a_n x_0^n$ jest zbieżny. W takim razie szereg $\sum a_n x^n$ jest zbieżny absolutnie. Z drugiej strony, jeżeli $|x| > R$ to szereg $\sum a_n x^n$ nie może być zbieżny: w przeciwnym przypadku mielibyśmy $|x| \in A$, czyli $|x| \leq R$. $\square$

Przykłady: (a) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ma promień zbieżności $R = 1$, co można sprawdzić z kryterium d'Alemberta. W punkcie $x = 1$ jest rozbieżny (jest to wtedy szereg harmoniczny), a w punkcie $x = -1$ jest zbieżny, co wynika z kryterium Leibniza.

(b) Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ma promień zbieżności nieskończony, co można sprawdzić z kryterium d'Alemberta:

$$\left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = |x| \cdot \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

niezależnie od x .

(c) Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ ma promień zbieżności $R = 0$:

$$\left| \frac{(n+1)^{n+1} x^{n+1}}{n^n x^n} \right| = |x| \cdot (n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

dla każdego $x \neq 0$.

Stosując znane kryteria zbieżności szeregów otrzymujemy różne wzory na promień zbieżności.

Twierdzenie 4.12. *Rozważmy szereg potęgowy $\sum a_n x^n$ i niech*

$$g = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Jeżeli $g = 0$ to promień zbieżności szeregu jest nieskończony, jeżeli $g = +\infty$ to $R = 0$, a jeżeli $0 < g < \infty$ to

$$R = \frac{1}{g}.$$

Dowód. Zastosujmy kryterium Cauchy'ego do szeregu $\sum a_n x^n$.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot g.$$

Jeżeli $g = 0$ to szereg jest zbieżny (absolutnie) dla każdego $x \in \mathbf{R}$, czyli promień zbieżności jest nieskończony. Jeżeli $g = +\infty$ to szereg jest rozbieżny dla każdego $x \neq 0$, czyli $R = 0$. W końcu, jeżeli $0 < g < \infty$ to szereg jest zbieżny (absolutnie) dla $|x| < \frac{1}{g}$ i rozbieżny dla $|x| > \frac{1}{g}$, czyli $R = \frac{1}{g}$. $\square$

Uwaga: Stosując kryterium d'Alemberta w podobny sposób otrzymalibyśmy następujące twierdzenie: jeżeli

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

istnieje (właściwa lub niewłaściwa), to $R = \frac{1}{g}$ (przy czym rozumiemy, że $R = 0$ dla $g = +\infty$ i R nieskończony dla $g = 0$).

Przykład: Rozważmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$. Stosując powyższą uwagę liczymy:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e.$$

A więc $R = \frac{1}{e}$. Przy okazji, porównując to z Twierdzeniem 4.12 możemy wywnioskować, że

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Pokażemy teraz, że ciąg $\{\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}\}$ jest rosnący, a skoro tak, to jego granica górna jest też granicą (ćwiczenie), i mamy następujący wniosek, który warto zapamiętać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Sprawdźmy, że ciąg ten istotnie jest rosnący. Wprowadźmy oznaczenie $c_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Wiemy, że $2 = c_1 < c_2 < c_3 < \dots < e$, a więc

$$\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} = c_n^n > c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_{n-1} = \frac{n^n}{n!}. \quad (4.5)$$

Ostatnią równość możemy udowodnić indukcyjnie: dla $n = 2$ mamy $c_1 = \frac{2^2}{2} = 2$, czyli równość jest prawdziwa. Następnie wykonajmy krok indukcyjny:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot \dots \cdot c_{n-1} \cdot c_n &= \frac{n^n}{n!} \cdot c_n = \frac{n^n}{n!} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \frac{n^n}{n!} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Mamy więc udowodnioną nierówność (4.5). Wynika z niej natychmiast następująca nierówność:

$$\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n(n+1)}} > \frac{1}{n!} \quad \Rightarrow \quad \frac{(n+1)^{n^2}}{(n!)^n} > \frac{n^{n(n+1)}}{(n!)^{n+1}}.$$

Teraz wystarczy wyciągnąć stronami pierwiastki stopnia $n(n+1)$, i otrzymujemy

$$\sqrt[n+1]{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}} > \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}},$$

czyli to, co chcieliśmy.

5 Granica funkcji

Niech f będzie funkcją zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych, to znaczy $f : D_f \rightarrow \mathbf{R}$, $D_f \subset \mathbf{R}$, dziedzina f . Niech $\overline{D_f}$ będzie „uzupełnieniem” D_f , czyli zbiorem tych wszystkich punktów x , dla których istnieje ciąg $\{x_n\} \subset D_f$, $x_n \neq x$, zbieżny do x . Na przykład, dziedziną naturalną funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ jest zbiór $D_f = \{x : x \neq 0\}$. Wtedy $\overline{D_f} = \mathbf{R}$. Pojęcie granicy funkcji w punkcie będziemy chcieli wprowadzić dla punktów z $\overline{D_f}$, czyli takich, które należą do dziedziny f (ale nie są izolowane), albo nie należą, ale są na „samym brzegu” dziedziny.

Definicja 5.1. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in \overline{D_f}$ granicę g , jeżeli

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon.$$

W takiej sytuacji piszemy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g.$$

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in \overline{D_f}$ granicę niewłaściwą ∞ ($-\infty$) jeżeli

$$\forall M \in \mathbf{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M \quad (f(x) < M).$$

Piszemy wtedy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty.$$

Definicję granicy funkcji w punkcie można natychmiast przetłumaczyć na język zbieżności ciągów liczbowych:

Twierdzenie 5.2. Niech $x_0 \in \overline{D_f}$. Wtedy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $\{x_n\} \subset D_f$, $x_n \neq x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g.$$

Podobnie, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $\{x_n\} \subset D_f$, $x_n \neq x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \pm\infty.$$

Dowód. Niech f ma w punkcie x_0 granicę g

$$g = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem z D_f , zbieżnym do x_0 , $x_n \neq x_0$. Pokażemy, że ciąg $\{f(x_n)\}$ zbiega do g . Niech $\epsilon > 0$. Z definicji granicy wynika, że istnieje $\delta > 0$ takie, że jeżeli $x \in D_f$, $x \neq x_0$ to

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon. \quad (5.1)$$

Skoro $x_n \rightarrow x_0$ to (δ pełni rolę ϵ z definicji granicy ciągu) istnieje $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że $\forall n \geq n_0$ mamy $|x_n - x_0| < \delta$, czyli, korzystając z (5.1)

$$|f(x_n) - g| < \epsilon.$$

W ten sposób pokazaliśmy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$.

Teraz dowód w drugą stronę. Niech $f(x_n) \rightarrow g$ dla każdego ciągu $x_n \rightarrow x_0$, spełniającego $x_n \neq x_0$ i $\{x_n\} \subset D_f$. Pokażemy, że f ma w x_0 granicę g . Dowód przeprowadzimy nie wprost. Załóżmy, że f nie ma granicy g w x_0 , czyli że nie zachodzi warunek z definicji granicy funkcji w punkcie, czyli, innymi słowy załóżmy, że

$$\exists \epsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in D_f \quad 0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - g| \geq \epsilon_0.$$

Korzystając z powyższego zdefiniujemy ciąg $\{x_n\}$ który da nam sprzeczność. Ciąg $\{x_n\}$ definiujemy następująco. Dla $n \in \mathbf{N}$ niech $\delta = \frac{1}{n}$, a x_n niech będzie tym elementem D_f , który spełnia $0 < |x - x_0| < \frac{1}{n} \wedge |f(x) - g| \geq \epsilon_0$. Zauważmy, że tak powstały ciąg $\{x_n\}$ spełnia $\{x_n\} \subset D_f$, $x_n \neq x_0$, $x_n \rightarrow x_0$, ale $f(x_n) \not\rightarrow g$. Otrzymaliśmy więc sprzeczność.

Przypadek granic niewłaściwych pozostawiamy jako ćwiczenie dla czytelnika. $\square$

Korzystając z powyższego twierdzenia, i twierdzeń o zbieżności i granicach ciągów mamy następujący wniosek.

Wniosek 5.3. (i) Jeżeli $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ i $b = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = a \pm b, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = a \cdot b,$$

a jeżeli dodatkowo $b \neq 0$ to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{a}{b}.$$

(ii) Jeżeli w pewnym otoczeniu x_0 mamy

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a,$$

to także

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

(iii) Z granicą funkcji w punkcie możemy „wchodzić pod pierwiastki”, czyli

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)},$$

o ile odpowiednie pierwiastki są określone ($f \geq 0$ dla k parzystego).

Przykłady: (a) Obliczymy granicę

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 5}{x^3 - 1}.$$

Mianownik $x^3 - 1$ jest różny od zera w otoczeniu punktu $x_0 = 2$, więc 2, wraz z pewnym otoczeniem należy do dziedziny funkcji. Niech $x_n \rightarrow 2$, $x_n \neq 2$, oraz $x_n^3 \neq 1$. Wtedy

$$\frac{3x_n - 5}{x_n^3 - 1} \rightarrow \frac{3 \cdot 2 - 5}{2^3 - 1} = \frac{1}{7},$$

czyli $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-5}{x^3-1} = \frac{1}{7}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$. Skorzystamy z następującego oszacowania: dla $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$$0 \leq \sin x \leq x. \quad (5.2)$$

Wynika to z Rysunku ???. $\frac{x}{2}$ to pole sektora koła wyciętego kątem x , natomiast $\frac{\sin x}{2}$ to pole zawartego w sektorze trójkąta (trójkąt ten ma podstawę 1 i wysokość $\sin x$). Ponieważ $\sin(-x) = -\sin(x)$ ($\sin$ jest nieparzysty), więc dla $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ z powyższego otrzymujemy

$$x \leq \sin x \leq 0.$$

W takim razie, dla $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ mamy

$$0 \leq |\sin x| \leq |x|,$$

czyli $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

(c) W przypadku $\cos x$ możemy skorzystać z tego, co pokazaliśmy dla $\sin x$. W otoczeniu zera $\cos x$ jest dodatni, a więc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\lim_{x \rightarrow 0} \sin x\right)^2} = 1.$$

(d) Korzystając z tożsamości trygonometrycznych możemy znaleźć granice w innych punktach

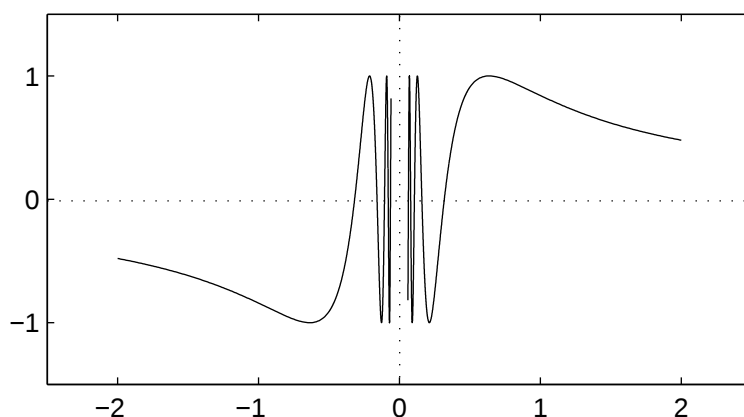
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x &= \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x + x_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x \cos x_0 + \cos x \sin x_0) \\ &= \cos x_0 \lim_{x \rightarrow 0} \sin x + \sin x_0 \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \\ &= \sin x_0, \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x &= \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x + x_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x \cos x_0 - \sin x \sin x_0) \\ &= \cos x_0 \lim_{x \rightarrow 0} \cos x - \sin x_0 \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \\ &= \cos x_0. \end{aligned}$$

(e) Zauważmy, że granica $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ nie istnieje. Weźmy dwa ciągi, $x_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}$ oraz $y_n = \frac{1}{3\pi/2 + 2n\pi}$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{x_n} &= \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1, \\ \sin \frac{1}{y_n} &= \sin \left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi \right) = \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) = -1, \end{aligned}$$



Rysunek 5.2: Funkcja $\sin \frac{1}{x}$ w otoczeniu 0.

a więc $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$, oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = -1$. Sytuację wyjaśnia Rysunek 5.2.

(f) Niech $a > 1$. Pokażemy, że $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$. Niech $\epsilon > 0$ i $x > 0$. Mamy więc $a^x > 1$. Niech $n_0 \in \mathbf{N}$ będzie takie, że $\sqrt[n]{a} - 1 < \epsilon$ dla $n \geq n_0$. Korzystamy z tego, że wiemy, że $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$. Niech $\delta_0 = \frac{1}{n_0}$. Wtedy, jeżeli

$$0 < x < \delta_0 \Rightarrow 1 < a^x < a^{\frac{1}{n_0}} \Rightarrow 0 < a^x - 1 < \sqrt[n_0]{a} - 1 < \epsilon.$$

Niech teraz $x < 0$. Wiemy, że

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \rightarrow 1,$$

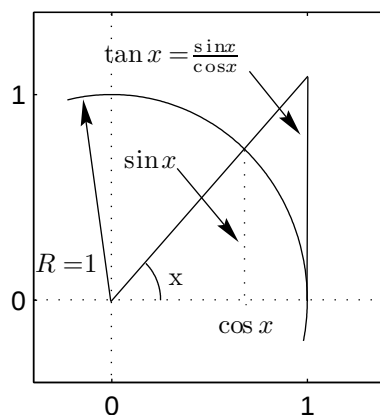
i niech $n_1 \in \mathbf{N}$ będzie takie, że dla $n \geq n_1$ zachodzi $0 < 1 - \sqrt[n]{1/a} < \epsilon$. Niech $\delta_1 = \frac{1}{n_1}$, wtedy jeżeli $-\delta_1 < x < 0$ to

$$a^{-\frac{1}{n_1}} < a^x < 1 \Rightarrow \sqrt[n_1]{\frac{1}{a}} < a^x < 1 \Rightarrow 0 < 1 - a^x < 1 - \sqrt[n_1]{\frac{1}{a}} < \epsilon.$$

Ostatecznie niech $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$, wtedy $0 < |x| < \delta$ pociąga $|1 - a^x| < \epsilon$.

(g) Niech $a > 1$, wtedy $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$. Mamy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = \lim_{x \rightarrow 0} a^{x+x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} a^x \cdot a^{x_0} = a^{x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} a^x = a^{x_0}.$$



Rysunek 5.3: Dalsze oszacowanie funkcji $\sin x$.

(h) Ponownie odwołajmy się do definicji funkcji $\sin x$, i porównajmy pole sektora koła jednostkowego, wyciętego kątem środkowym x , oraz pole dużego trójkąta (Rysunek 5.3). Pole sektora to $\frac{x}{2}$, natomiast duży trójkąt ma wysokość $\frac{\sin x}{\cos x}$ i podstawę 1, czyli pole równe $\frac{\tan x}{2}$. Dla $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ mamy więc

$$\frac{x}{2} \leq \frac{\sin x}{2 \cos x},$$

a więc, łącząc to z (5.2) otrzymujemy podwójne oszacowanie

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1. \quad (5.3)$$

Rozważając parzystość funkcji, otrzymujemy (5.3) także dla $|x| \leq \frac{\pi}{2}$. Skrajne funkcje mają granicę 1 w zerze, więc także

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Jest to jedna z ważnych granic, która będzie się jeszcze pojawiać na tym wykładzie.

Granice jednostronne

Jeżeli w definicji granicy ograniczymy się tylko do $x > x_0$ (lub $x < x_0$) i warunek jest spełniony, to mówimy, że funkcja ma w punkcie x_0 granicę prawostronną (lewostronną). Na przykład dla granic właściwych (skończonych) warunek na istnienie granicy prawostronnej jest następujący

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon.$$

Dla granicy lewostronnej warunek wygląda następująco

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon.$$

Granice prawostronną i lewostronną oznaczamy odpowiednio

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Dla granic niewłaściwych warunki te trzeba zmodyfikować w zwykły sposób.

Wniosek 5.4. (i) $g = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)$ jeżeli dla dowolnego ciągu $\{x_n\} \subset D_f$, $x_n > x_0$ (lub $x_n < x_0$) i $x_n \rightarrow x_0$ mamy $f(x_n) \rightarrow g$. Sytuacja jest całkowicie analogiczna do Twierdzenia 5.2.

(ii) Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę g (właściwą lub niewłaściwą) wtedy i tylko wtedy, gdy ma w x_0 obie granice jednostronne, i są sobie równe. Wynika to wprost z definicji.

(iii) Twierdzenia dotyczące działań na granicach odnoszą się także do granic jednostronnych, na przykład

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x).$$

Przykłady: (a) $f(x) = [x]$. Jeżeli $x_0 \in \mathbf{Z}$ to, jak łatwo sprawdzić

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = x_0, \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = x_0 - 1.$$

W punktach $x_0 \in \mathbf{Z}$ f ma więc różne granice jednostronne, czyli zwykłej (obustronnej) granicy nie ma. W pozostałych punktach f ma granicę obustronną.

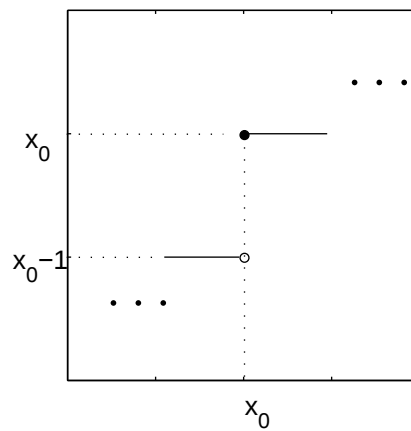
(b) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$. Dziedzina $D_f = \{x : x \neq 0\}$, a więc $0 \in \overline{D_f}$. Mamy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0.$$

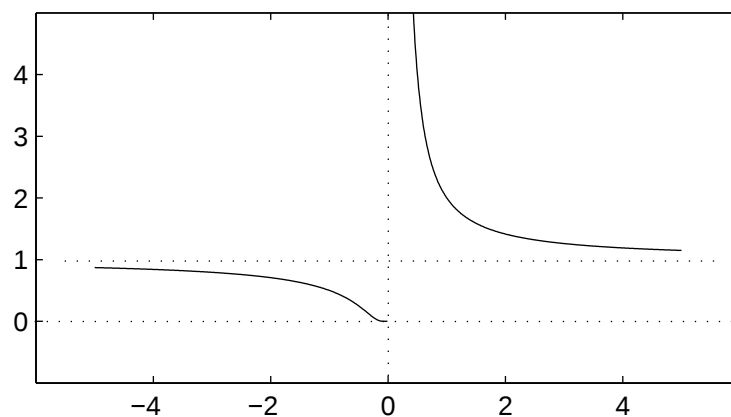
Pierwsza granica wynika stąd, że funkcja 2^y jest rosnąca i nieograniczona.

Granice w nieskończoności

Jeżeli dziedzina funkcji to umożliwia, to możemy rozważać granice funkcji w $+\infty$ i $-\infty$. Granice te mogą być właściwe (skończone), lub niewłaściwe (nieskończone).



Rysunek 5.4: Granice jednostronne funkcji $[x]$.



Rysunek 5.5: Granice w zerze funkcji $2^{\frac{1}{x}}$.

Definicja 5.5. Mówimy, że funkcja f ma w $+\infty$ ($-\infty$) granicę g , jeżeli

$$\forall \epsilon > 0 \exists M \forall x \in D_f \quad x > M \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon \quad (x < -M \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon).$$

Piszemy wtedy

$$g = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x).$$

Podobnie definiujemy granice niewłaściwe. Na przykład, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ jeżeli

$$\forall M \exists K \forall x \in D_f \quad x > K \Rightarrow f(x) > M.$$

Wniosek 5.6. Powyższą definicję również można wyrazić przy pomocy ciągów. Na przykład, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego ciągu $\{x_n\}$ z dziedziny funkcji f , rozbieżnego do $+\infty$ ciąg $\{f(x_n)\}$ też jest rozbieżny do $+\infty$.

Przykłady: (a) Znajdziemy granicę w $+\infty$ funkcji $f(x) = \frac{e^x}{x}$. Oczywiście funkcja ta ma granicę 0 w $-\infty$. Natomiast gdy $x \rightarrow +\infty$ zarówno licznik jak i mianownik dążą do $+\infty$. Najpierw rozważmy ciąg

$$\frac{e^n}{n} = \left(\frac{e}{\sqrt[n]{n}} \right)^n.$$

Ponieważ $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, więc

$$\frac{e}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow e.$$

W takim razie

$$\exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \frac{e}{\sqrt[n]{n}} > 2 \Rightarrow \frac{e^n}{n} > 2^n.$$

Ciąg 2^n jest rozbieżny do $+\infty$, mamy więc granicę niewłaściwą

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n} = +\infty.$$

Mamy też następujące oszacowania. Oznaczmy na chwilę $\epsilon = x - [x]$, więc $0 \leq \epsilon < 1$, więc

$$\frac{e^x}{x} = \frac{e^{[x]+\epsilon}}{[x]+\epsilon} \geq \frac{e^{[x]}}{[x]+1} = \frac{1}{e} \frac{e^{[x]+1}}{[x]+1}.$$

Niech $x_n \rightarrow +\infty$ i niech $M > 0$. Wtedy

$$\exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \frac{e^n}{n} \geq e \cdot M,$$

oraz

$$\exists n_1 \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq n_1 \quad x_n \geq n_0 \Rightarrow [x_n] \geq n_0.$$

Czyli dla $n \geq n_1$ mamy

$$\frac{e^{x_n}}{x_n} \geq \frac{1}{e} \frac{e^{[x_n]+1}}{[x_n]+1} \geq \frac{1}{e} \cdot e \cdot M = M.$$

Udowodniliśmy więc, że

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

Można to rozumieć następująco. Gdy x rośnie do ∞ to funkcja wykładnicza e^x rośnie szybciej niż x . Zauważmy, że powyższe rozumowanie można łatwo zmodyfikować, i pokazać, że funkcja wykładnicza rośnie szybciej niż dowolny wielomian.

(b) Rozważmy granicę

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Granice odpowiedniego ciągu (gdy $x = n$) znamy, to jest z definicji liczba e . Teraz w chcielibyśmy zaadaptować rozumowanie z przykładu (a), i oszacować wartości funkcji w punktach x przez wartości w pewnych punktach naturalnych n . Potrzebne nam będą różne oszacowania, ale rozumowanie jest proste. Niech $\epsilon > 0$, ciąg $x_n \rightarrow \infty$, i oznaczmy $k_n = [x_n]$. Zauważmy, że $k_n \rightarrow \infty$ i spełniają one

$$k_n \leq x_n < k_n + 1 \\ \frac{1}{k_n + 1} < \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{k_n},$$

(wystarczy, że $x_n \geq 1$), więc dalej

$$1 + \frac{1}{k_n + 1} < 1 + \frac{1}{x_n} \leq 1 + \frac{1}{k_n} \\ \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n + 1} \\ \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n + 1} \frac{1}{1 + \frac{1}{k_n + 1}} < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)$$

Wiemy, że ciągi

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{oraz} \quad \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2}$$

są zbieżne do e , a więc istnieje $n_1 \in \mathbf{N}$ takie, że dla $n \geq n_1$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) < e + \epsilon \quad \text{oraz} \quad \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} > e - \epsilon.$$

Niech $n_0 \in \mathbf{N}$ będzie takie, że dla $n \geq n_0$ mamy $x_n \geq n_1$ czyli $k_n = [x_n] \geq n_1$. Wtedy

$$e - \epsilon < \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n + 1} \frac{1}{1 + \frac{1}{k_n + 1}} < \\ < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right) < e + \epsilon,$$

czyli

$$\left| \left(1 + \frac{1}{x_n} \right)^{x_n} - e \right| < \epsilon.$$

Podobnie możemy udowodnić, że granica tej funkcji w $-\infty$ też wynosi e . Dowód będzie podobny, z wykorzystaniem znanej nam granicy ciągu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{e}.$$

6 Funkcje ciągłe

Definicja 6.1. Mówimy, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 swojej dziedziny, jeżeli

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Mówimy, że funkcja jest ciągła na zbiorze $A \subset D_f$ jeżeli jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in A$. Jeżeli funkcja jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny, to mówimy po prostu, że jest ciągła

Mówiąc kolokwialnie funkcja ciągła to taka, „pod którą można wejść” z granicą. Intuicyjne znaczenie jest takie, że wykres f jest linią ciągłą.

Uwagi: (i) Stosując definicję granicy w punkcie otrzymujemy następujący warunek na ciągłość funkcji w punkcie x_0

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Stosując język ciągów, czyli Twierdzenie 5.2 otrzymujemy warunek

$$\forall \{x_n\} \in D_f, \quad x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0).$$

(ii) Jeżeli $x_0 \in D_f$ jest punktem izolowanym dziedziny, to pojęcia granicy funkcji w takim punkcie nie zdefiniowaliśmy. Dla porządku ustalmy, że w każdym punkcie izolowanym dziedziny funkcja jest automatycznie, z definicji, ciągła. Oczywiście, punkty izolowane to przypadki bardzo wyjątkowe, ale na przykład funkcja $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$ ma naturalną dziedzinę $D_f = \{0\} \cup [1, \infty)$.

Wniosek 6.2. Wszystkie funkcje elementarne, czyli wielomiany, funkcje wymierne, trygonometryczne, potęgowa i wykładnicza są ciągłe.

Twierdzenie 6.3. Suma, różnica, iloczyn, iloraz oraz złożenie funkcji ciągłych są ciągłe w każdym punkcie, w którym operacja jest wykonalna.

Dowód. Pokażemy tylko przypadek złożenia. Pozostałe działania na funkcjach ciągłych są natychmiastową konsekwencją twierdzenia o działaniach na granicach funkcji. Niech złożenie $g \circ f$ będzie wykonalne, czyli dla każdego $x \in D_f$ niech $f(x) \in D_g$, oraz niech f i g będą ciągłe. Złożenie $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ jest więc określone dla każdego $x \in D_f$. Niech $x_n \rightarrow x_0$, $x_n, x_0 \in D_f$. Wtedy $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ (ciągłość f w x_0) oraz $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0))$ (ciągłość g w $f(x_0)$). Złożenie jest więc ciągłe. $\square$

Przykład: Niech $f(x) = x^x$ dla $x > 0$ i niech $f(0) = 1$. Pokażemy, że $f(x)$ jest ciągła w 1, czyli

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1.$$

Wykorzystamy granice, które znamy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\log x} = \infty.$$

Powyższe wynika wprost z definicji granic, i z tego, że $x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \log x_n \rightarrow \infty$. Przechodząc do odwrotności otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0.$$

Ostatnia granica wynika z poprzedniej, gdyż $x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow 0^+$. W końcu otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \log x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x} = e^0 = 1.$$

Jak łatwo zauważyć ciągłość funkcji $f(x)$ w pozostałych punktach dziedziny otrzymamy łatwo, kiedy udowodnimy ciągłość funkcji $\log x$. To z kolei będzie konsekwencją twierdzenia o ciągłości funkcji odwrotnej, które wkrótce udowodnimy.

Uwaga: Funkcja może być nieciągła z różnych powodów. Na przykład, może istnieć granica funkcji w punkcie

$$g = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

ale $g \neq f(x_0)$. Z taką sytuacją mamy do czynienia w przypadku $f(x) = [-|x|]$. Jeżeli $0 < |x| < 1$ to $-1 < -|x| < 0$ a więc $f(x) = -1$, czyli

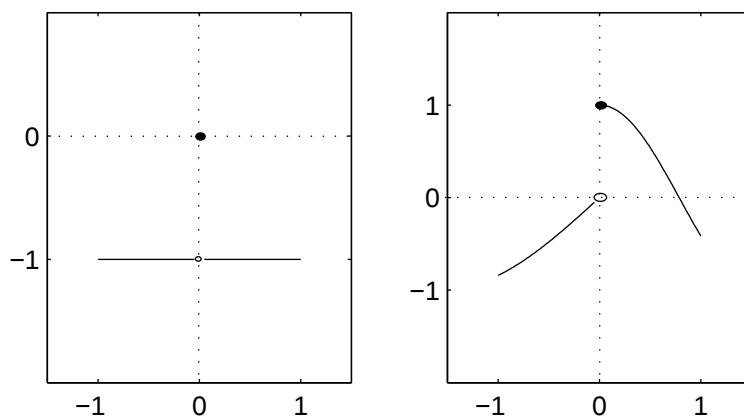
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1.$$

Z drugiej strony $f(0) = 0$. Tego typu nieciągłość nazywamy nieciągłością usuwalną. Wystarczy zmienić wartość funkcji w punkcie x_0 na wartość

granicy w tym punkcie, i tak zmieniona w jednym punkcie funkcja jest już w tym punkcie ciągła.

Inny rodzaj nieciągłości to tak zwana nieciągłość skokowa. Jeżeli istnieją granice jednostronne funkcji w punkcie, ale są różne, to mówimy, że funkcja ma nieciągłość skokową. Przykładem może być funkcja $f(x) = [x]$, która ma nieciągłości skokowe w punktach całkowitych

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = k - 1, \quad \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$



Rysunek 6.1: Nieciągłość usuwalna i nieciągłość skokowa.

Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0, \end{cases}$$

ma nieciągłość innego rodzaju, granica $f(x)$ w zerze w ogóle nie istnieje.

Własności funkcji ciągłych

Funkcje ciągłe mają wiele ważnych własności, z których najważniejsze teraz udowodnimy. Funkcja ciągła na odcinku skończonym $[a, b]$ jest ograniczona i osiąga wartość największą i najmniejszą, oraz przyjmuje wszystkie wartości pośrednie, pomiędzy najmniejszą i największą.

Twierdzenie 6.4. *Funkcja $f(x)$ ciągła na przedziale $[a, b]$ (skończonym i zawierającym końce) jest ograniczona.*

Dowód. Udowodnimy, że $f(x)$ jest ograniczona od góry. Dowód tego, że jest też ograniczona od dołu pozostawiamy czytelnikowi. Można przerobić dowód ograniczoności od góry, albo zauważyć, że $-f(x)$ jest ograniczona od góry dokładnie wtedy, gdy $f(x)$ jest ograniczona od dołu. Dowód ograniczoności od góry przeprowadzimy nie wprost. Załóżmy więc, że $f(x)$ nie jest ograniczona od góry. Istnieje zatem ciąg punktów $\{x_n\} \subset [a, b]$, dla których

$$f(x_n) > n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ciąg ten konstruujemy wykorzystując kolejno, że $f(x)$ nie jest ograniczona przez 1, przez 2, i przez kolejne $n \in \mathbf{N}$. Ciąg $\{x_n\}$ jest ograniczony, a zatem można wybrać z niego podciąg $\{x_{n_k}\}$ zbieżny do jakiejś liczby $c \in [a, b]$ (Twierdzenie 3.12):

$$x_{n_k} \rightarrow c.$$

Z definicji ciągłości mamy $f(x_{n_k}) \rightarrow f(c)$, co jest sprzecznością, bo ciąg $\{f(x_{n_k})\}$ nie jest ograniczony. $\square$

Uwaga: Istotne jest, że przedział $[a, b]$ jest skończony, i że zawiera końce. Bez tych założeń funkcja może nie być ograniczona. Na przykład, $f(x) = x$ jest ciągła na $[0, \infty)$, a $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła na $(0, 1)$, a żadna z nich nie jest ograniczona. Uwaga ta odnosi się też do następnego twierdzenia.

Twierdzenie 6.5. *Funkcja $f(x)$ ciągła na przedziale $[a, b]$ (skończonym i zawierającym końce) przyjmuje swoje wartości największą i najmniejszą.*

Dowód. Pokażemy tylko, że $f(x)$ przyjmuje wartość największą. Niech

$$M = \sup\{y : y = f(x), x \in [a, b]\}.$$

Wiemy, że zbiór wartości jest ograniczony, więc powyższy kres górny istnieje. Z definicji kresu wynika, że istnieje ciąg $\{x_n\} \subset [a, b]$ taki, że $f(x_n) \rightarrow M$. Ciąg $\{x_n\}$ jest ograniczony, więc można z niego wybrać podciąg $\{x_{n_k}\}$ zbieżny do jakiejś liczby $c \in [a, b]$ (ponownie Twierdzenie 3.12). Mamy więc $f(x_{n_k}) \rightarrow f(c)$, czyli $f(c) = M$. $\square$

Twierdzenie 6.6 (Własność Darboux). *Funkcja $f(x)$ ciągła na przedziale $[a, b]$ przyjmuje wszystkie wartości pomiędzy swoją wartością najmniejszą m i największą M . Innymi słowy, zbiorem wartości funkcji ciągłej na przedziale $[a, b]$ jest przedział $[m, M]$.*

Dowód. Wiemy, że funkcja $f(x)$ przyjmuje swoje wartości ekstremalne, czyli istnieją liczby $c, d \in [a, b]$ takie, że $f(c) = m$ i $f(d) = M$. Rozpatrzmy przypadek gdy $c < d$. W przypadku, gdy $c = d$ jak łatwo zauważyć $f(x)$

jest stała, a w przypadku nierówności przeciwnej możemy rozważać $-f(x)$ zamiast $f(x)$, albo zmodyfikować powyższy argument. Niech więc $c < d$. Załóżmy, że $y_0 \in (m, M)$, czyli y_0 jest wartością pośrednią, pomiędzy najmniejszą i największą. Niech

$$x_0 = \sup\{t \in [c, d] : f(x) < y_0 \text{ dla } x \in [c, t]\}.$$

Wiemy, że powyższy zbiór jest niepusty, gdyż zawiera przynajmniej c ($f(c) = m < y_0$), oraz jest ograniczony. Kres górny więc istnieje. Pokażemy, że wtedy musi zachodzić

$$f(x_0) = y_0, \quad (6.1)$$

czyli istotnie y_0 jest wartością funkcji $f(x)$. Załóżmy, że $f(x_0) < y_0$. Wtedy skoro $f(x)$ jest ciągła, to istnieje $\delta > 0$ takie, że $f(x) < y_0$ dla $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Widzimy więc, że $f(x) < y_0$ na przedziale $[c, x_0 + \delta]$, co przeczy definicji x_0 . Mamy więc sprzeczność, a więc nie może być $f(x_0) < y_0$. Załóżmy więc, że $f(x_0) > y_0$. Tym razem, z ciągłości $f(x)$ w x_0 mamy, że $f(x) > y_0$ na pewnym przedziale $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, dla pewnego $\delta > 0$. Natomiast z definicji x_0 wynika, że $f(x) < y_0$ dla $x < x_0$, a więc znowu mamy sprzeczność. Jediną możliwością pozostaje (6.1). $\square$

Uwaga: Powyższe twierdzenie może być wykorzystane do przybliżonego znajdowania pierwiastków równań. Jeżeli wiemy, że funkcja $f(x)$ jest ciągła, i $f(a) \cdot f(b) < 0$, to $f(x)$ ma pierwiastek w przedziale (a, b) :

$$f(x) = 0 \quad \text{dla pewnego } x \in (a, b).$$

Algorytm przybliżonego znajdowania tego pierwiastka, tak zwana metoda „przez połowienie”, jest rekurencyjny. Niech $c = \frac{a+b}{2}$. Albo $f(c) = 0$, i wtedy pierwiastek jest znaleziony, albo $f(c) \neq 0$ a więc musi być $f(a) \cdot f(c) < 0$ lub $f(c) \cdot f(b) < 0$. Innymi słowy, pierwiastek musi być albo w lewej połowie przedziału $[a, b]$, albo w prawej. Trafiamy więc do punktu wyjścia (to znaczy wiemy, że pierwiastek jest w przedziale), ale z przedziałem o połowę krótszym. Na przykład, żeby obliczyć numerycznie $\sqrt{2}$ możemy, szukać pierwiastka równania

$$f(x) = x^2 - 2 = 0.$$

Mamy $f(1) \cdot f(2) = -2 < 0$, a funkcja $f(x)$ jest ciągła, więc istnieje pierwiastek w przedziale $(1, 2)$ (niewielka niespodzianka). Łatwo zauważyć, że metodą połowienia osiągamy 3 dodatkowe cyfry dziesiętne przybliżenia na każde 10 iteracji. Każda iteracja sprowadza się (w tym przykładzie) do 1 mnożenia, czyli algorytm jest bardzo efektywny — 3 cyfry dziesiętne dokładności na 10 mnożeń.

Twierdzenie 6.7. *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i różnowartościowa, to funkcja $g(y)$, odwrotna do $f(x)$, jest ciągła na zbiorze wartości $f(x)$, czyli na przedziale $[m, M]$, gdzie stałe m i M oznaczają, podobnie jak w poprzednim twierdzeniu wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x)$ na $[a, b]$.*

Dowód. Obrazem (zbiorem wartości) $f(x)$, zgodnie z Twierdzeniem 6.6, jest przedział $[m, M]$, i jest więc on dziedziną funkcji odwrotnej $g(y)$. Jeżeli $m \leq y_0 \leq M$ to $g(y)$ jest określona w punkcie y_0 . Niech $y_n \rightarrow y_0$ i $y_n \in [m, M]$ dla $n = 1, 2, \dots$. Skoro y_n i y_0 należą do zbioru wartości $f(x)$, to istnieją $x_0, x_n \in [a, b]$ takie, że $f(x_n) = y_n$ i $f(x_0) = y_0$. Ciąg $\{x_n\}$ jest ograniczony. Niech jego granica górna będzie oznaczona przez x'_0 , a granica górna przez x''_0 . Niech podciągi $\{x_{n'_k}\}$ i $\{x_{n''_k}\}$ odpowiednio zbiegają do x'_0 i x''_0 . Z ciągłości $f(x)$ wynika, że

$$f(x'_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n'_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n'_k} = y_0,$$

i podobnie

$$f(x''_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n''_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n''_k} = y_0.$$

Mamy więc $f(x'_0) = f(x''_0) = y_0 = f(x_0)$. Skoro $f(x)$ jest różnowartościowa, to $x_0 = x'_0 = x''_0$. Granica górna i dolna ciągu $\{x_n\}$ są więc równe x_0 , a więc ciąg jest zbieżny do x_0 . Mamy więc

$$g(y_n) = x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 = g(y_0),$$

czyli $g(y)$ jest ciągła w y_0 . □

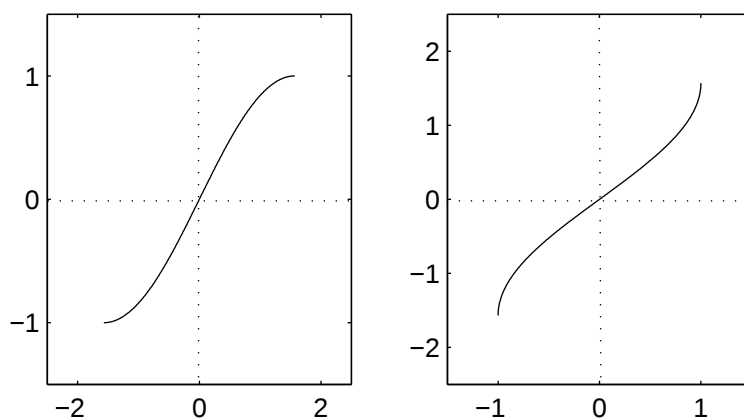
Wniosek 6.8. *Funkcja $\log_a x$ jest ciągła na $(0, \infty)$, jako funkcja odwrotna do funkcji ciągłej a^x ($a > 0$, $a \neq 1$).*

Uwaga: Funkcja ciągła, różnowartościowa na odcinku $[a, b]$ musi być ściśle monotoniczna. Dowód tego prostego faktu pozostawiamy jako ćwiczenie.

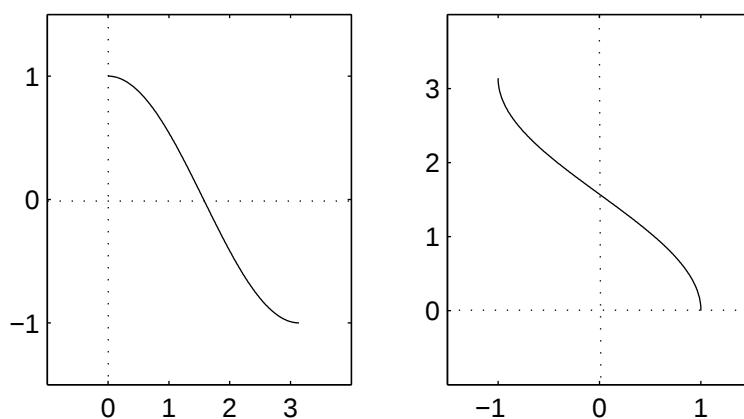
Funkcje cyklometryczne

Funkcje $\sin x$ i $\cos x$ nie są różnowartościowe a więc nie są odwracalne. Można rozważać te funkcje na mniejszej dziedzinie, na której są różnowartościowe. Funkcja $\sin x$ z dziedziną ograniczoną do $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ jest funkcją ściśle rosnącą od -1 do 1 , a więc jest różnowartościowa i odwracalna.

Funkcja odwrotna, określona na $[-1, 1]$ nazywa się $\arcsin x$, i zgodnie z powyższym twierdzeniem, jest ciągła. Podobnie $\cos x$, z dziedziną ograniczoną do przedziału $[0, \pi]$ jest funkcją ściśle malejącą od 1 do -1 , a więc



Rysunek 6.2: Funkcja $\sin x$ i $\arcsin x$.



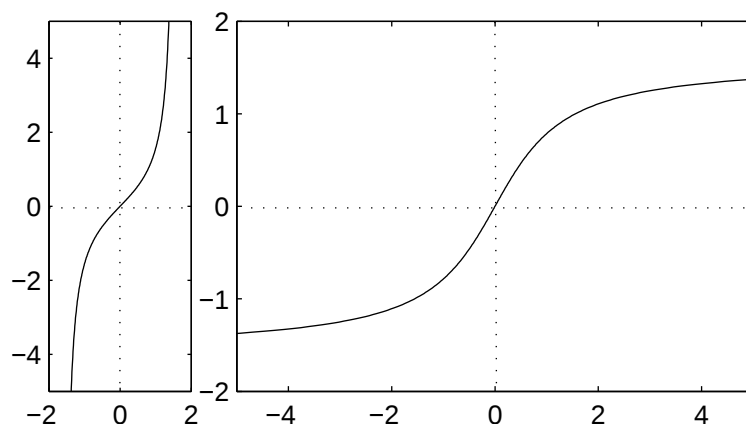
Rysunek 6.3: Funkcja $\cos x$ i $\arccos x$.

odwrotną Funkcja odwrotna, określona na przedziale $[-1, 1]$ nazywa się $\arccos x$, i również jest ciągła.

Funkcja $\tan x$ jest okresowa, o okresie π , i składa się z „gałęzi”. Z dziedziną ograniczoną do $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ jest funkcją ściśle rosnącą, odwrotną. Funkcja odwrotna, określona na całej prostej $\mathbf{R}$ nazywa się $\arctan x$ i również jest ciągła.

7 Pochodna

Pochodna funkcji to chwilowa prędkość jej zmian.



Rysunek 6.4: Gałąź funkcji $\tan x$ i funkcja $\arctan x$.

Definicja 7.1. *Pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie x nazywamy granicę*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (7.1)$$

o ile ta granica istnieje. Jeżeli istnieje, to mówimy, że $f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie x (albo że „ma pochodną” w punkcie x). Pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie x oznaczamy

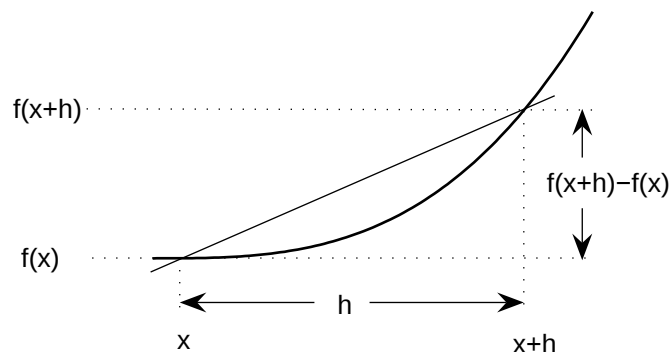
$$f'(x) \quad (\text{„}f \text{ prim}\text{”}) \quad \text{lub} \quad \frac{df}{dx} \quad (\text{„}df \text{ po } dx\text{”}).$$

Uwagi: (i) Pochodna funkcji $f(x)$ też jest funkcją, której dziedziną jest zbiór punktów, w których $f(x)$ jest różniczkowalna. Obliczanie pochodnej nazywa się „różniczkowaniem” funkcji.

(ii) Iloraz występujący w granicy (7.1) nazywamy „ilorazem różnicowym”. Iloraz różnicowy, czyli przyrost funkcji podzielony przez przyrost argumentu wyznacza średnią prędkość wzrostu funkcji $f(x)$ na przedziale $[x, x+h]$ (jeżeli $h > 0$, w przeciwnym wypadku należy to odpowiednio przeformułować). Stąd interpretacja pochodnej jako chwilowej prędkości zmian funkcji. Pochodna ma też interpretację geometryczną. Iloraz różnicowy (7.1) to tangens kąta nachylenia φ siecznej wykresu. Gdy $h \rightarrow 0$ sieczna staje się styczną, więc w interpretacji geometrycznej pochodna to tangens kąta nachylenia stycznej do wykresu. Istnienie pochodnej oznacza po prostu istnienie stycznej do wykresu.

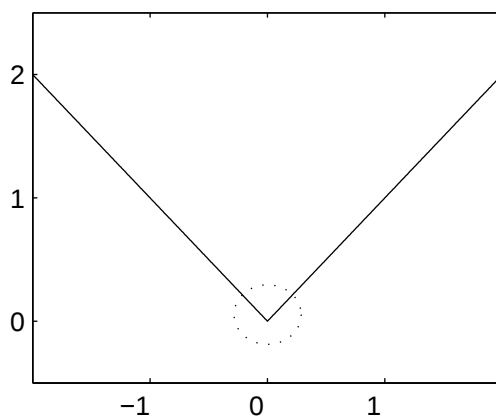
(iii) Pochodna może nie istnieć. Na przykład, dla funkcji $f(x) = |x|$ mamy

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$



Rysunek 7.1: Iloraz różnicowy i sieczna wykresu.

Ilorazy różnicowe mają różne granice jednostronne w zerze, a więc $f(x)$ nie jest różniczkowalna w 0. Interpretacja geometryczna nieróżniczkowalności w 0 jest szczególnie sugestywna: wykres $f(x)$ ma w punkcie $(0,0)$ „dziubek”, i nie ma stycznej.



Rysunek 7.2: Wykres $f(x) = |x|$ i nieróżniczkowalny „dzióbek”.

(iv) Pochodną funkcji $f(x)$ definiujemy w punktach „wewnętrznych” dziedziny, to znaczy w takich punktach $x \in D_f$, dla których pewien przedział $(x-\delta, x+\delta) \subset D_f$.

Twierdzenie 7.2. *Jeżeli $f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 to musi być ciągła w x_0 .*

Dowód. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (f(x) - f(x_0)) \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) \\
 &= f'(x_0) \cdot 0 = 0.
 \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 7.3. *Jeżeli $f(x)$ i $g(x)$ są różniczkowalne w punkcie x , to*

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (reguła Leibniza),
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, o ile $g(x) \neq 0$.

Dowód. Pokażemy iloczyn i iloraz, natomiast sumę i różnicę pozostawiamy czytelnikowi. Zaczniemy od iloczynu.

$$\begin{aligned}
 &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h)}{h} + \frac{(g(x+h) - g(x))f(x)}{h} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x),
 \end{aligned}$$

o ile pochodne po prawej stronie istnieją. Przypomnijmy, że jeżeli $g(x)$ jest różniczkowalna w punkcie x to jest ciągła w tym punkcie, a więc $g(x+h) \rightarrow g(x)$ gdy $h \rightarrow 0$. Teraz iloraz. Jeżeli $g(x) \neq 0$ i $g(x)$ jest ciągła w x , to $g(x+h) \neq 0$ dla odpowiednio małych h . Licząc granice gdy $h \rightarrow 0$ możemy

się ograniczyć do h z dowolnie małego przedziału wokół 0.

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h g(x+h) g(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) - (f(x)g(x+h) - f(x)g(x))}{h}}{g(x+h) g(x)} \\
 &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) - f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g^2(x)} \\
 &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.
 \end{aligned}$$

□

Przykłady: (a) Funkcja stała $f(x) = c$. $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c-c}{h} = 0$. Pochodna funkcji stałej jest równa 0.

(b) $f(x) = x$. Mamy $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$.

(c) $f(x) = x^n$, dla $n \in \mathbf{N}$. Mamy $f'(x) = nx^{n-1}$, (reguła Leibniza plus indukcja, albo wzór dwumianowy Newtona).

(d) Wielmian stopnia n : $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. $f'(x) = na_n x^{n-1} + \dots + a_1$, wielomian stopnia $n-1$.

(e) $f(x) = \sin x$. Mamy

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\frac{1}{2}h) \cos(x + \frac{1}{2}h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{1}{2}h) \\
 &= \cos x.
 \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy z tożsamości trygonometrycznej

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \sin b \cos a,$$

dla $a = x + \frac{1}{2}h$ i $b = \frac{1}{2}h$. Podobnie, w następnym przykładzie skorzystamy z tożsamości

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \sin b.$$

(f) $f(x) = \cos x$. Podobnie jak w (e)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin(\frac{1}{2}h) \sin(x + \frac{1}{2}h)}{h} \\
&= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x + \frac{1}{2}h) \\
&= -\sin x.
\end{aligned}$$

(g) $f(x) = \log x$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log \left(\frac{x+h}{x} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \log \left(\frac{x+h}{x} \right)^{\frac{1}{h}}.
\end{aligned}$$

Jak wiemy, logarytm jest funkcją ciągłą (Wniosek 6.8), więc z granicą możemy „wejść” pod logarytm. Zobaczmy więc, jaka jest granica pod logarytmem.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{x+h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}} \right)^{\frac{x}{h}} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Wiemy też, że z granicą można „wejść” pod dowolną potęgę. Zauważmy, że gdy $h \rightarrow 0^+$ to $\frac{x}{h} \rightarrow +\infty$, a gdy $h \rightarrow 0^-$ to $\frac{x}{h} \rightarrow -\infty$ (rozważamy $x \in D_{\log}$, czyli $x > 0$). Pamiętamy, że

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t = e, \quad \text{a więc} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}} \right)^{\frac{x}{h}} = e,$$

(obie granice 1-stronne są równe e). Składając kawałki rozumowania otrzymujemy

$$f'(x) = \log e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log e = \frac{1}{x}.$$

Twierdzenie 7.4 (Różniczkowanie funkcji odwrotnej). *Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ będzie ciągłą i różnowartościową, oraz różniczkowalną w punkcie $x_0 \in (a, b)$, przy czym $f'(x_0) \neq 0$. Niech $g(y)$ będzie funkcją odwrotną do $f(x)$, czyli określoną na przedziale $[m, M]$, gdzie m i M są kresami zbioru wartości $f(x)$, i niech $y_0 = f(x_0)$. Wtedy $g(y)$ jest różniczkowalna w punkcie y_0 i*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dowód. Oznaczmy $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$ (k zależy od h). Zatem $g(y_0 + k) = x_0 + h$. Dla $k \rightarrow 0$ mamy więc $h \rightarrow 0$, bo $g(y)$ jest ciągła. Tak więc

$$\begin{aligned} g'(y_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{h}{f(x_0 + h) - f(x_0)} \\ &= \frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}} \\ &= \frac{1}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

□

Wniosek 7.5. Dla $f(x) = e^x$ i $y_0 = e^{x_0}$ mamy

$$f'(x_0) = \frac{1}{\log'(y_0)} = \frac{1}{\frac{1}{y_0}} = y_0 = e^{x_0}.$$

Pochodna funkcji e^x to ta sama funkcja e^x .

Ekstrema funkcji

Mówimy, że w punkcie x_0 funkcja $f(x)$ ma maksimum (albo lokalne maksimum), jeżeli

$$f(x) \leq f(x_0),$$

dla $x \in D_f$ z pewnego otoczenia x_0 . Podobnie, mówimy, że ma w x_0 minimum (lokalne minimum), jeżeli

$$f(x) \geq f(x_0),$$

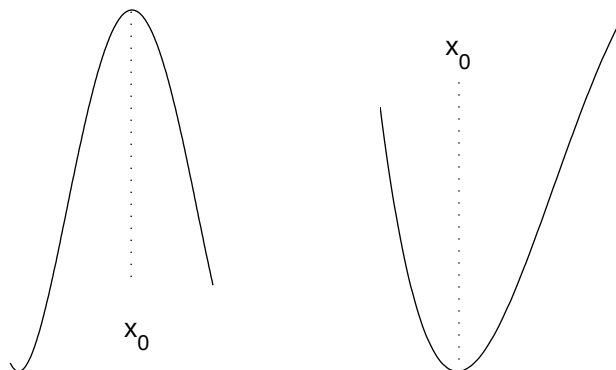
dla $x \in D_f$, z pewnego otoczenia x_0 . Ogólnie, mówimy, że $f(x)$ ma w punkcie x_0 ekstremum, jeżeli ma w tym punkcie maksimum lub minimum.

Twierdzenie 7.6. Jeżeli $f(x)$ ma w punkcie x_0 ekstremum, i jest w tym punkcie różniczkowalna, to

$$f'(x_0) = 0.$$

Dowód. Niech $f(x)$ ma w x_0 maksimum. Przypadek minimum jest podobny. Dla h z pewnego otoczenia 0 mamy więc

$$f(x + h) \leq f(x_0),$$



Rysunek 7.3: Lokalne maksimum i minimum.

czyli dla $h > 0$ mamy $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$, a dla $h < 0$ mamy $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$. Granica prawostronna ilorazów różnicowych w zerze nie może więc być dodatnia, a granica lewostronna nie może być ujemna. Ponieważ są równe, to ich wspólną wartością musi być zero. $\square$

Uwagi: (i) Jeżeli $f(x)$ ma w punkcie x_0 ekstremum, to $f'(x_0) = 0$, ale nie na odwrót. Na przykład, funkcja $f(x) = x^3$ spełnia $f'(0) = 0$, ale nie ma w 0 ekstremum.

(ii) Powyższe twierdzenie może służyć do szukania wartości największej czy najmniejszej funkcji. Wartość największa i najmniejsza jest przyjęta albo w punkcie, gdzie funkcja nie jest różniczkowalna (na przykład na końcach przedziału na którym badamy funkcję), albo w punkcie gdzie pochodna jest 0.

(iii) Twierdzenie 7.6 jest oczywiste geometrycznie. Jeżeli funkcja ma w punkcie ekstremum, to styczna do wykresu w tym punkcie (jeżeli istnieje) musi być pozioma.

Twierdzenie 7.7 (Rolle'a). *Niech $f(x)$ będzie ciągła na przedziale $[a, b]$, i różniczkowalna w (a, b) . Załóżmy, że $f(a) = f(b)$. Wtedy istnieje $c \in (a, b)$ takie, że $f'(c) = 0$.*

Dowód. $f(x)$ przyjmuje swoje wartości najmniejszą i największą. Jeżeli obie są przyjęte na końcach przedziału $[a, b]$, to znaczy, że funkcja jest stała, i $f'(x) \equiv 0$ na całym przedziale (a, b) . W przeciwnym wypadku jedno z ekstremów musi być przyjęte w punkcie wewnętrznym przedziału $c \in (a, b)$, a w takim razie w tym punkcie musi być $f'(c) = 0$. $\square$

Następujące twierdzenie jest ważne i z punktu widzenia teorii, i z punktu widzenia zastosowań.

Twierdzenie 7.8 (o wartości średniej). *Jeżeli $f(x)$ jest ciągła na $[a, b]$, i różniczkowalna na (a, b) , to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Dowód. Zauważmy, że funkcja

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$$

spełnia założenia twierdzenia Rolle'a: $g(a) = g(b) = 0$. Po prostu od $f(x)$ odjęliśmy funkcję liniową o tej samej wartości punkcie a i tym samym przyroście na odcinku $[a, b]$. Z twierdzenia istnieje więc punkt $c \in (a, b)$ taki, że $g'(c) = 0$. Ale $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, co kończy dowód. $\square$

Z twierdzenia o wartości średniej natychmiast otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 7.9. *Jeżeli na jakimś przedziale (a, b) mamy*

- $f'(x) \geq 0$ to funkcja $f(x)$ jest rosnąca na (a, b) ,
- $f'(x) \leq 0$ to funkcja $f(x)$ jest malejąca na (a, b) ,
- $f'(x) = 0$ to funkcja $f(x)$ jest stała na (a, b) ,

Jeżeli nierówności są ostre, to monotoniczność jest ścisła.

Uwagi: (i) Zauważmy, że we wniosku zakładamy, że odpowiednia nierówność zachodzi na całym odcinku. To jest ważne założenie, bo na przykład funkcja $\frac{1}{x}$ ma pochodną stale ściśle ujemną na całej swojej dziedzinie, a nie jest malejąca. Jest malejąca na każdym z odcinków $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$, ale nie na całej dziedzinie.

(ii) Wprost z definicji pochodnej wynika następująca obserwacja: jeżeli pewnym otoczeniu x_0 funkcja $f(x)$ jest rosnąca, to $f'(x_0) \geq 0$. Podobnie dla funkcji malejącej. Widzimy więc, że monotoniczność funkcji jest ściśle związana ze znakiem pochodnej.

Następujące podajemy bez dowodu.

Twierdzenie 7.10 (Reguła łańcuchowa). *Niech $f(x)$ i $g(x)$ będą różniczkowalne, i niech złożenie $g \circ f$ będzie określone, to znaczy wartości $f(x)$ wpadają do dziedziny $g(x)$. Wtedy złożenie $(g \circ f)(x)$ jest różniczkowalne i*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x).$$

Łatwo sobie wyobrazić, jak można udowodnić ten wzór:

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Szczegóły techniczne są jednak uciążliwe.

Wniosek 7.11. *Niech $f(x) = x^a$, gdzie a jest dowolną potęgą rzeczywistą. Mamy wtedy*

$$x^a = e^{a \log x} \Rightarrow (x^a)' = e^{a \log x} (a \log x)' = x^a \cdot \frac{a}{x} = a x^{a-1}.$$

Wzór ten udowodniliśmy wcześniej dla potęgi naturalnej.

Następujące twierdzenie to tak zwana reguła de l'Hôspitala. Jest to bardzo proste twierdzenie, jednak zaskakująco przydatne. Będziemy je stosować wielokrotnie. Pozwala ono w wielu przypadkach obliczyć granice (jeżeli istnieją) postaci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

gdzie obie funkcje mają granice 0. Wyrażenie takie nazywamy wyrażeniem nieoznaczonym typu $\frac{0}{0}$ – łatwo się domysleć dlaczego.

Twierdzenie 7.12 (Reguła de l'Hôspitala). *Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są ciągłe na przedziale $[a, b]$ i różniczkowalne na (a, b) , oraz jeżeli*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0,$$

oraz jeżeli granica

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

istnieje, to granica

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

też istnieje, i obie granice są sobie równe:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dowód. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia o wartości średniej wprowadzimy odpowiednią funkcję pomocniczą, i skorzystamy z twierdzenia Rolle'a. Niech $h > 0$ będzie ustalone i niech na przedziale $[x, x + h]$

$$\Phi(x) = f(x) - g(x) \frac{f(a+h)}{g(a+h)}.$$

Mamy $\Phi(a) = \Phi(a+h) = 0$, czyli istnieje $c \in (a, a+h)$ takie, że $\Phi'(c) = 0$. To oznacza

$$f'(c) - g'(c) \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = 0 \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a+h)}{g(a+h)}.$$

Zauważmy też, że gdy $h \rightarrow 0$ to $c \rightarrow a$. Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (7.2)$$

to granica

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

musi istnieć i jest równa granicy (7.2). Mamy więc

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

o ile granica po prawej stronie istnieje. □

Uwagi: (i) Twierdzenie jest też prawdziwe, jeżeli zamiast granic prawostronnych w a rozważamy lewostronne w b . Tak samo dla granic obustronnych.

(ii) Regułę de l'Hôpitala można iterować. Na przykład rozważmy granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

Różniczkując licznik i mianownik znowu otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone typu $\frac{0}{0}$ w zerze, $\frac{\cos x - 1}{3x^2}$. Różniczkując licznik i mianownik ponownie otrzymujemy $\frac{-\sin x}{6x}$, wciąż wyrażenie nieoznaczone typu $\frac{0}{0}$ w zerze. Moglibyśmy różniczkować ponownie, ale akurat tą granicę znamy, wynosi ona $-\frac{1}{6}$. Wracamy więc, stosując regułę de l'Hôpitala dwukrotnie.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

(iii) Regułę de l'Hôpitala można też stosować do granic innego typu, odpowiednio je przekształcając. Rozważmy na przykład granicę

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)},$$

gdzie $f(x) \rightarrow 0$ i $g(x) \rightarrow 0$ gdy $x \rightarrow +\infty$. Wprowadźmy oznaczenia

$$\varphi(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{oraz} \quad \psi(t) = g\left(\frac{1}{t}\right),$$

wtedy $\varphi(t) \rightarrow 0$ i $\psi(t) \rightarrow 0$ gdy $t \rightarrow 0^+$, oraz

$$\varphi'(t) = f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(\frac{-1}{t^2}\right), \quad \text{oraz} \quad \psi'(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(\frac{-1}{t^2}\right).$$

Otrzymujemy więc

$$\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \frac{f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})} = \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}.$$

Wynika z tego, że granice

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{oraz} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$

są identyczne, istnienie jednej jest równoważne istnieniu drugiej, i jeżeli istnieją to są sobie równe. Mamy więc

$$\begin{aligned} A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} &\Rightarrow A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} \\ &\Rightarrow A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

(iv) Można też udowodnić (z grubsza w podobny sposób) wersję reguły de l'Hôpitala dla wyrażeń nieoznaczonych postaci $\frac{\infty}{\infty}$: jeżeli $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ to również $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. Podobnie dla $a = \infty$ (wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{\infty}{\infty}$ w ∞).

Przykłady: (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$. Jest to wyrażenie postaci $\frac{0}{0}$, więc mamy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x$. Jest to wyrażenie postaci $0 \cdot \infty$, ale przenosząc x do mianownika otrzymujemy wyrażenie postaci $\frac{\infty}{\infty}$. Mamy więc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$. Jest to wyrażenie postaci 1^∞ . Przekształcamy je więc w zwykły sposób

$$(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \log \cos x} = e^{\frac{\log \cos x}{x}}.$$

W wykładniku jest wyrażenie typu $\frac{0}{0}$, więc obliczmy granicę w wykładniku

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{1} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}}$. Jest to wyrażenie postaci $\frac{\infty}{\infty}$ w ∞ , więc mamy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Logarytm rośnie do ∞ wolniej niż pierwiastek.

Pochodne funkcji cyklometrycznych

(a) $f(x) = \arcsin x$. $f(x)$ jest określona na przedziale $[-1, 1]$ i jest funkcją odwrotną do funkcji $\sin x$ zawężonej do przedziału $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Niech $x_0 \in (-1, 1)$ i $x_0 = \sin(t_0)$ dla pewnego $t_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Z Twierdzenia 7.4 wiemy, że $f(x)$ jest różniczkowalna w x_0 i

$$f'(x_0) = \frac{1}{\sin' t_0} = \frac{1}{\cos t_0} = \frac{1}{\cos \arcsin x_0}.$$

Wyrażenie to można uprościć. Dla $t_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $\cos t_0 > 0$, a więc $\cos t_0 = \sqrt{1 - \sin^2 t_0}$. Mamy więc

$$f'(x_0) = \frac{1}{\cos \arcsin x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}}.$$

(b) $f(x) = \arccos x$. Jest to funkcja określona na przedziale $[-1, 1]$, odwrotna

do funkcji $\cos x$ zawężonej do przedziału $[0, \pi]$. Niech $x_0 \in (-1, 1)$, i $x_0 = \cos t_0$ dla pewnego $t_0 \in (0, \pi)$.

$$f'(x_0) = \frac{1}{\cos' t_0} = \frac{1}{-\sin t_0} = \frac{-1}{\sin \arccos x_0}.$$

Podobnie jak poprzednio, $\sin x$ jest dodatni na $(0, \pi)$, więc $\sin t_0 = \sqrt{1 - \cos^2 t_0}$, czyli

$$f'(x_0) = \frac{-1}{\sin \arccos x_0} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x_0^2}}.$$

(c) $f(x) = \arctan x$. Funkcja $f(x)$ jest określona na całej prostej $\mathbf{R}$, i jest funkcją odwrotną do funkcji $\tan x$ zawężonej do przedziału $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Niech $x_0 = \tan t_0$ dla pewnego $t_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Mamy

$$f'(x_0) = \frac{1}{\tan' t_0} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 t_0}} = \cos^2 t_0.$$

Z drugiej strony

$$\cos^2 t_0 = \frac{\cos^2 t_0}{\cos^2 t_0 + \sin^2 t_0} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin t_0}{\cos t_0}\right)^2} = \frac{1}{1 + \tan^2 t_0} = \frac{1}{1 + x_0^2}.$$

Ostatecznie więc

$$f'(x_0) = \frac{1}{1 + x_0^2}.$$

Pochodne wyższych rzędów

Jeżeli pochodna $f'(x)$ sama jest różniczkowalna, to możemy obliczyć jej pochodną, tak zwaną drugą pochodną funkcji $f(x)$

$$(f')'(x) = f''(x) = f^{(2)}(x).$$

Podobnie możemy obliczyć pochodne dowolnego rzędu $f^{(n)}(x)$ (jeżeli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna odpowiednią ilość razy). Piszemy $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Przykłady: (a)

$$\sin^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos x & n - \text{nieparzyste,} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \sin x & n - \text{parzyste.} \end{cases}$$

(b)

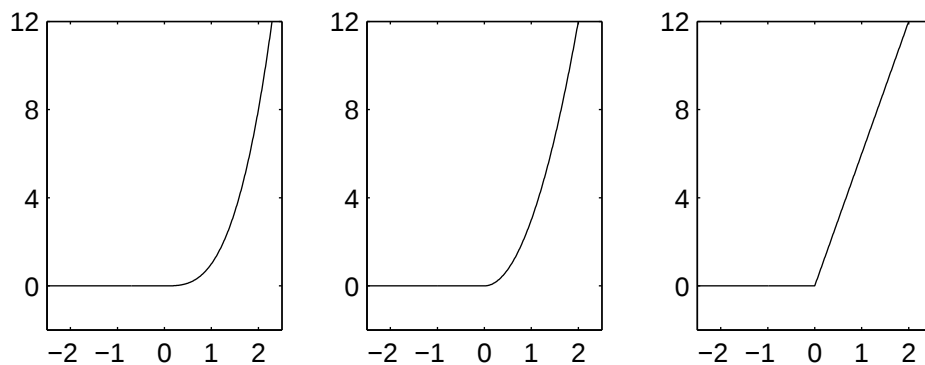
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \neq 0$ i $f'(x) = 3x^2$ dla $x > 0$ oraz $f'(x) = 0$ dla $x < 0$. Jest też różniczkowalna w zerze, i $f'(0) = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0}{x} = 0.$$

$f(x)$ jest więc różniczkowalna w każdym punkcie, i

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \geq 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$



Rysunek 7.4: Funkcje $f(x)$, $f'(x)$ i $f''(x)$ z przykładu (b).

Obliczamy teraz pochodną $f'(x)$. Dla $x > 0$ $f''(x) = 6x$, a dla $x < 0$ $f''(x) = 0$. W zerze $f'(x)$ też jest różniczkowalna, i $f''(0) = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0}{x} = 0.$$

$f(x)$ jest więc różniczkowalna 2-krotnie w każdym punkcie, i

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & x \geq 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Zauważmy, że $f''(x)$ nie jest różniczkowalna w zerze:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f''(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6x}{x} = 6, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f''(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0}{x} = 0.$$

$f(x)$ jest więc 2-krotnie różniczkowalna w każdym punkcie, ale nie jest 3-krotnie różniczkowalna w zerze.

Uwaga: Wszystkie funkcje elementarne są różniczkowalne nieskończenie wiele razy w każdym punkcie swojej dziedziny.

Badanie przebiegu funkcji

Omówimy teraz procedurę badania przebiegu funkcji. Badanie przebiegu funkcji to typowe zadanie w zastosowaniach.

Uwaga: Procedura badania zmienności funkcji odnosi się do funkcji odpowiednio regularnych. Istnieją funkcje, których wykresu nie da się naszkicować, na przykład

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q}, \\ 0 & x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Funkcje, które badamy najczęściej są przynajmniej przedziałami ciągłe.

Przystępując do zbadania przebiegu funkcji postępujemy następująco. Kolejność poszczególnych operacji w zasadzie nie ma znaczenia.

(1) Ustalamy dziedzinę funkcji, jeżeli nie jest podana jawnie. Ustalamy punkty ciągłości, nieciągłości, różniczkowalności i nieróżniczkowalności. Z reguły funkcja badana jest przedziałami ciągła i przedziałami różniczkowalna, więc ustalamy te przedziały.

(2) Sprawdzamy parzystość i okresowość funkcji. Jeżeli $f(x)$ jest parzysta to znaczy $f(-x) = f(x)$ lub nieparzysta, to znaczy $f(-x) = -f(x)$, to wystarczy zbadać jej przebieg dla $x \geq 0$ a następnie wyniki odpowiednio przenieść na $x < 0$. Jeżeli funkcja jest okresowa, to znaczy istnieje T takie, że $f(x + T) = f(x)$, to wystarczy zbadać funkcję na jednym okresie.

(3) Ustalamy pierwiastki funkcji, czyli punkty x_0 w których

$$f(x) = 0,$$

oraz ustalamy przedziały na których funkcja zachowuje znak.

(4) Ustalamy przedziały monotoniczności i wyznaczamy ekstrema lokalne. Badamy znak pochodnej. Można z tego wyciągnąć wnioski na temat ekstremów. Czasem pomocne jest następujące twierdzenie

Twierdzenie 7.13. *Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) \neq 0$ to $f(x)$ ma w x_0 ekstremum. Jeżeli $f''(x_0) < 0$ to jest to maksimum, a jeżeli $f''(x_0) > 0$ to jest to minimum.*

Dowód. Jeżeli $f''(x_0) > 0$ to istnieje $\delta > 0$ taka, że dla $h \in (-\delta, \delta)$ mamy

$$0 < \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \frac{f''(x_0 + h)}{1}.$$

A więc na przedziale $(x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x)$ jest ujemna ($f(x)$ maleje), a na przedziale $(x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x)$ jest dodatnia ($f(x)$ rośnie). W x_0 funkcja ma więc minimum. Podobną analizę możemy przeprowadzić dla przypadku $f''(x_0) < 0$ (maksimum). $\square$

Należy pamiętać, że ekstrema mogą znajdować się w punktach, w których funkcja nie jest różniczkowalna.

(5) Jeżeli funkcja $f(x)$ ma drugą pochodną i na jakimś przedziale $f''(x) > 0$, to mówimy, że jest na tym przedziale wypukła. Jeżeli na jakimś przedziale $f''(x) < 0$ to mówimy, że jest na tym przedziale wklęsła. Jeżeli w jakimś punkcie funkcja zmienia się z wypukłej na wklęsłą, albo na odwrót, to taki punkt nazywamy punktem przegięcia. Taki punkt jest punktem ekstremalnym pochodnej. Znajdujemy punkty przegięcia funkcji, i określamy przedziały wypukłości/wklęsłości. Wypukłość i wklęsłość mają interpretację geometryczną. Na odcinku na którym funkcja jest wypukła styczne do wykresu leżą pod wykresem, a sieczne nad wykresem. Jeżeli funkcja jest wklęsła to odwrotnie, styczne leżą nad wykresem a sieczne pod.

(6) Znajdujemy ewentualne asymptoty. Asymptoty mogą być różnego rodzaju.

(a) Jeżeli w jakimś punkcie a mamy $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$, to prostą pionową o równaniu $x = a$ nazywamy asymptotą pionową funkcji.

(b) Jeżeli istnieje granica $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = A$, to prostą poziomą o równaniu $y = A$ nazywamy asymptotą poziomą funkcji w $+\infty$ (lub w $-\infty$).

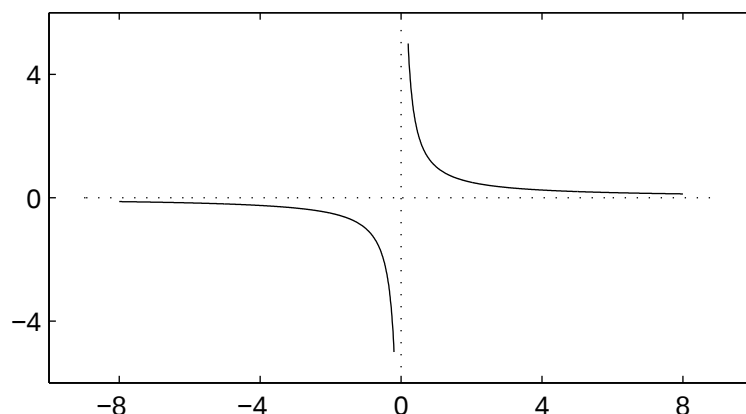
(c) Jeżeli istnieje stała m taka, że istnieje granica $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = c$, to prostą o równaniu $y = mx + c$ nazywamy asymptotą ukośną funkcji w $+\infty$ (lub w $-\infty$). Asymptota pozioma to szczególny przypadek asymptoty ukośnej, dla której $m = 0$. Jeżeli funkcja $f(x)$ ma w $+\infty$ albo $-\infty$ asymptotę ukośną, to stała m jest równa każdej z granic

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x+1) - f(x)), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x),$$

(ostatnia granica może nie istnieć, nawet jeżeli asymptota ukośna istnieje). Należy jednak pamiętać, że istnienie którejkolwiek z tych granic nie gwarantuje jeszcze istnienia asymptoty ukośnej. Żeby istniała asymptota ukośna musi jeszcze istnieć granica

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = c.$$

Przykłady: (a) $f(x) = \frac{1}{x}$ ma asymptotę pionową $x = 0$ oraz asymptoty poziome $y = 0$ w obu nieskończonościach (Rys. 7.5).



Rysunek 7.5: Asymptoty funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$.

(b) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{2x^2}$. Funkcja ma asymptotę pionową $x = 0$. Będziemy szukali asymptot ukośnych.

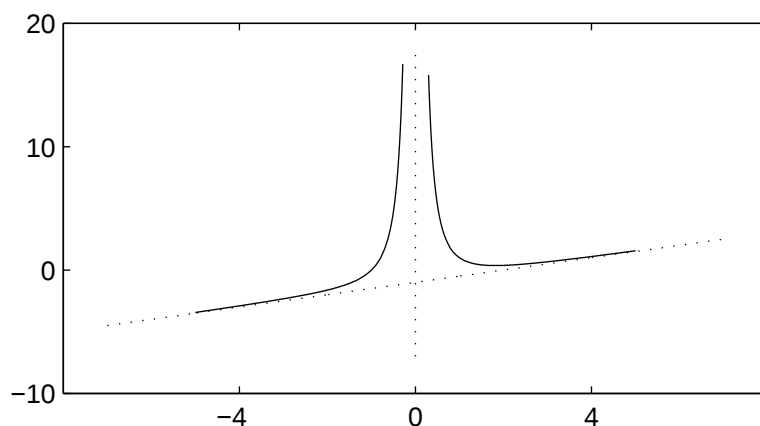
$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{2x^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^3} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2}, \\ f(x) - \frac{1}{2}x &= \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{2x^2} - \frac{x}{2} = \frac{x^3 - 2x^2 + 3 - x^3}{2x^2} \\ &= \frac{-2x^2 + 3}{2x^2} = -1 + \frac{3}{2x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} -1. \end{aligned}$$

$f(x)$ ma więc asymptotę ukośną $y = \frac{1}{2}x - 1$ w obu nieskończonościach (Rys.7.6).

(c) Zbadajmy przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{x+1}.$$

Naturalną dziedziną funkcji jest $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, funkcja jest ciągła w każdym punkcie dziedziny i jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \neq 0$. Przedziały ciągłości to $(-\infty, -1)$ i $(-1, +\infty)$, a przedziały różniczkowalności to $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ oraz $(0, +\infty)$. Funkcja nie jest ani okresowa ani parzysta ani nieparzysta. Jedynym pierwiastkiem jest pierwiastek licznika, czyli $x = 0$.

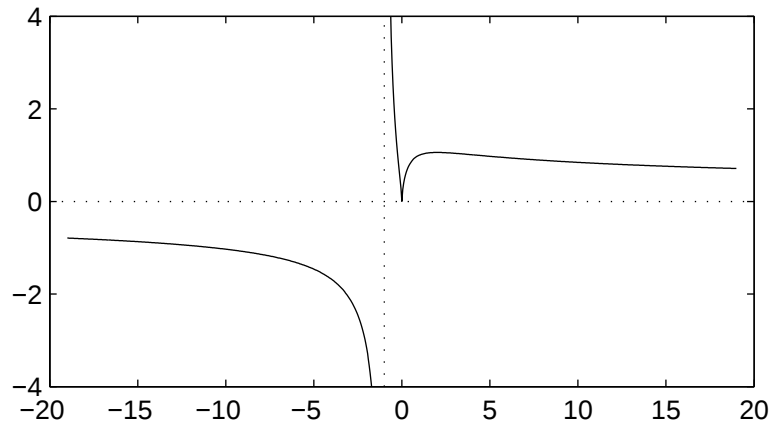


Rysunek 7.6: Asymptoty funkcji z przykładu (b).

$f(x)$ jest dodatnia dla $x > -1$, $x \neq 0$ i ujemna dla $x < -1$. Obliczmy pochodną

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2 \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} (1+x) - 2 x^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2 x^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^2} \cdot \left(\frac{2}{3} \frac{1+x}{x} - 1 \right) \\ &= \frac{2 x^{\frac{2}{3}}}{3(x+1)^2} \left(\frac{2}{x} - 1 \right). \end{aligned}$$

Pierwszy czynnik jest zawsze dodatni, więc znak pochodnej zależy tylko od znaku $(\frac{2}{x} - 1)$. Po łatwych rachunkach otrzymujemy, że pochodna jest dodatnia na przedziale $(0, 2)$ i ujemna na przedziałach $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ oraz $(2, +\infty)$. Funkcja $f(x)$ rośnie na przedziale $(0, 2)$, a maleje na pozostałych przedziałach. Widzimy więc, że ma minimum w zerze (jest to punkt nieróżniczkowalności), i maksimum w 2. Widzimy, że funkcja ma asymptotę pionową $x = -1$, oraz poziomą w $\pm\infty$ $y = 0$. Rozstrzygniemy teraz wypukłość. W tym celu policzymy drugą pochodną.



Rysunek 7.7: Wykres funkcji z przykładu (c).

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left(\frac{\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{x+1} - \frac{2x^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^2} \right)' \\
 &= \frac{-\frac{4}{9}x^{-\frac{4}{3}}(x+1) - \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{(x+1)^2} - \frac{\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x+1)^2 - 2x^{\frac{2}{3}}2(x+1)}{(x+1)^4} \\
 &= \frac{-\frac{4}{9}x^{-\frac{4}{3}}(x+1)^2 - \frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x+1) + 4x^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^3} \\
 &= -\frac{4}{9}x^{-\frac{4}{3}} \frac{(x+1)^2 + 6x(x+1) - 9x^2}{(x+1)^3} \\
 &= \frac{4}{9}x^{-\frac{4}{3}} \frac{2x^2 - 8x - 1}{(x+1)^3}.
 \end{aligned}$$

Wyrażenie $\frac{4}{9}x^{-\frac{4}{3}}$ jest zawsze dodatnie, a mianownik jest < 0 dla $x < -1$ i > 0 dla $x > -1$. Z kolei licznik jest > 0 dla $x \notin (2 - \frac{3}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{3}{\sqrt{2}})$ i < 0 dla $x \in (2 - \frac{3}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{3}{\sqrt{2}})$. Zauważmy jeszcze, że $-1 < 2 - \frac{3}{\sqrt{2}} < 0$, a więc funkcja $f(x)$ jest:

- wklęsła na $(-\infty, -1)$, $(2 - \frac{3}{\sqrt{2}}, 0)$ oraz $(0, 2 + \frac{3}{\sqrt{2}})$,
- wypukła na $(-1, 2 - \frac{3}{\sqrt{2}})$ oraz $(2 + \frac{3}{\sqrt{2}}, +\infty)$,
- ma punkty przegięcia w $2 \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Wiemy już wszystko co chcieliśmy, i możemy naszkicować wykres funkcji (Rys. 7.7).

Dowodzenie nierówności

Metody badanie funkcji można zastosować do dowodzenia nierówności.

Przykłady: (a) Udowodnimy nierówność $(1+x)^p \geq 1+px$ dla $x > -1$. Nierówność taką udowodniliśmy wcześniej dla wykładnika p naturalnego. Obecnie udowodnimy ją dla dowolnego $p \geq 1$. Rozważmy funkcję

$$f(x) = (1+x)^p - 1 - px, \quad x \geq -1.$$

Mamy

$$f'(x) = p(1+x)^{p-1} - p.$$

Dla $x \geq 0$ $1+x \geq 1$ oraz $p-1 \geq 0$ więc $(1+x)^{p-1} \geq 1$ czyli $f'(x) \geq 0$. Dla $x \leq 0$ $1+x \leq 1$ czyli $(1+x)^{p-1} \leq 1$, a więc $f'(x) \leq 0$. Funkcja $f(x)$ maleje dla $x < 0$ i rośnie dla $x > 0$, a więc ma w zerze swoją wartość najmniejszą

$$f(x) \geq f(0) = 0.$$

Funkcja jest więc zawsze ≥ 0 , czyli

$$(1+x)^p \geq 1+px.$$

(b) Dla $x \geq 0$ mamy $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$. Prawa część nierówności jest jasna, i była pokazana. Pokażemy lewą część. Niech

$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}.$$

Mamy $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$, $f'(0) = 0$, $f''(x) = -\sin x + x$. $f''(x) \geq 0$ dla $x \geq 0$, czyli $f'(x)$ rośnie dla $x \geq 0$, a skoro $f'(0) = 0$, to $f'(x) \geq 0$ dla $x \geq 0$. Sama funkcja więc rośnie dla $x \geq 0$, a więc

$$f(x) \geq f(0) = 0, \quad \text{dla } x \geq 0.$$

Wzór Taylora

Twierdzenie o wartości średniej można zapisać w postaci

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(c), \quad \text{dla pewnego } c \in (a, b).$$

Niech $h = b - a$, wtedy wzór przyjmuje postać

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h), \quad \text{dla pewnego } \theta \in (0, 1).$$

Twierdzenie o wartości średniej zapisane w tej postaci stanowi szczególny przypadek następującego twierdzenia.

Twierdzenie 7.14 (Wzór Taylora). *Niech funkcja $f(x)$ będzie różniczkowalna n -razy w przedziale $(a - \delta, a + \delta)$, dla pewnego $\delta > 0$. Wtedy, dla dowolnego h , $|h| < \delta$ istnieje $\theta \in (0, 1)$ takie, że*

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(a) + R_n, \end{aligned}$$

gdzie

$$R_n = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a + \theta h).$$

Dowód. Mamy dane h . Oznaczmy $b = a + h$, i utwórzmy następujące funkcje pomocnicze

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(b) - f(x) - \frac{(b-x)}{1!}f'(x) - \cdots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) \\ &= f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k)}(x), \\ \Phi(x) &= \varphi(x) - \frac{\varphi(a)}{(b-a)^n}(b-x)^n. \end{aligned}$$

$\Phi(x)$ spełnia założenia twierdzenia Rolle'a na przedziale o końcach a, b ($[a, b]$ lub $[b, a]$ w zależności od znaku h).

$$\Phi(a) = \varphi(a) - \frac{\varphi(a)}{(b-a)^n}(b-a)^n = 0, \quad \Phi(b) = \varphi(b) - 0 = 0.$$

Istnieje więc punkt c wewnątrz przedziału o końcach a, b , taki, że

$$\Phi'(c) = 0.$$

Punkt c możemy zapisać jako $a + \theta(b-a) = a + \theta h$ dla pewnego $\theta \in (0, 1)$. Mamy więc

$$\Phi'(a + \theta h) = \varphi'(a + \theta h) - \frac{\varphi(a)}{(b-a)^n} n (h - \theta h)^{n-1} (-1) = 0. \quad (7.3)$$

Musimy policzyć pochodną $\varphi'(x)$:

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= -f'(x) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) \right)' \\
&= -f'(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) \right)' \\
&= -f'(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) \right) \\
&= -f'(x) + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) \\
&= -f'(x) + f'(x) - \frac{(b-x)^{(n-1)}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) \\
&= -\frac{(b-x)^{(n-1)}}{(n-1)!} f^{(n)}(x).
\end{aligned}$$

Wstawiając to do (7.3) otrzymujemy

$$-\frac{(h-\theta h)^{(n-1)}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta h) + \frac{\varphi(a)}{(b-a)^n} n (h-\theta h)^{n-1} = 0,$$

czyli

$$\varphi(a) = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h).$$

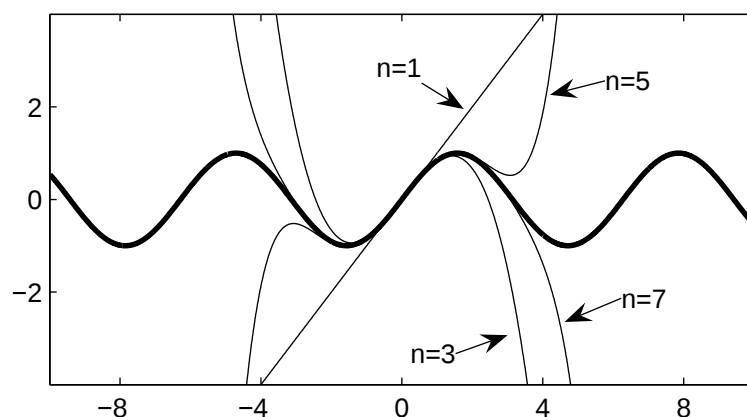
Pozostaje zauważyć, że $\varphi(a)$ jest dokładnie resztą R_n :

$$\begin{aligned}
f(b) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \varphi(a) \\
&= f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h).
\end{aligned}$$

□

Uwagi: (i) R_n to tak zwana reszta. Wzór Taylora to wzór na przybliżenie funkcji $f(x)$ wielomianem, w otoczeniu punktu a , przy czym R_n jest błędem tego przybliżenia.

(ii) Dokładność przybliżenia zależy od wielkości R_n w otoczeniu punktu a (R_n zależy od h). Im więcej pochodnych funkcja $f(x)$ ma w otoczeniu a



Rysunek 7.8: Wielomiany Taylora funkcji $\sin x$.

(czyli im $f(x)$ jest „gładsza” w otoczeniu a) tym dokładność przybliżenia jest lepsza.

(iii) Resztę R_n we wzorze Taylora można zapisać w wielu różnych postaciach. Postać podana w powyższym twierdzeniu to tak zwana reszta w postaci Lagrange’a. Różne postaci tej samej reszty przydają się, gdyż w konkretnych przypadkach różne postaci mogą dać się łatwiej szacować.

(iv) Zauważmy, że jeżeli $\sup\{|f^{(n)}(x)|; x \in (a - \delta, a + \delta), n \in \mathbf{N}\}$ istnieje, to dla dowolnego h , $|h| < \delta$ mamy $R_n \rightarrow 0$ gdy $n \rightarrow \infty$, czyli

$$f(a + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a). \quad (7.4)$$

Jest to tak zwany szereg Taylora funkcji $f(x)$ w punkcie a . Pamiętajmy, że szereg Taylora funkcji $f(x)$ nie musi być zbieżny, a nawet jeżeli jest zbieżny, to może się zdarzyć, że

$$f(a + h) \neq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

Za każdym razem musimy sprawdzić zbieżność reszt R_n do zera. Dopiero ta zbieżność gwarantuje zbieżność szeregu Taylora i wzór (7.4). Jeżeli $a = 0$ to otrzymujemy szczególny przypadek szeregu Taylora, tak zwany szereg Maclaurina

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

Przykłady: (a) $f(x) = \sin x$, $a = 0$. Wiemy, że

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n - \text{nieparzyste} \\ 0 & n - \text{parzyste.} \end{cases}$$

Wiemy także, że $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ dla wszystkich x, n . Mamy więc $R_n \rightarrow 0$ i otrzymujemy rozwinięcie funkcji $\sin x$ w szereg Maclaurina

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{\substack{n=0 \\ n-\text{nieparz.}}}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

(b) $f(x) = e^x$, $a = 0$. $f^{(n)}(x) = e^x$, czyli $f^{(n)}(0) = 1$. Zauważmy, że jeżeli $|h| \leq M$ to $|f^{(n)}(\theta h)| \leq e^M$. Reszty dążą więc do zera, a więc

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

(c) $f(x) = \log(1+x)$, $a = 0$. Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x}, & f''(x) &= (-1) \frac{1}{(1+x)^2}, \\ f'''(x) &= 2 \frac{1}{(1+x)^3}, & f^{(4)}(x) &= (-1) 2 \cdot 3 \frac{1}{(1+x)^4}. \end{aligned}$$

Mamy więc

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} (n-1)!.$$

Musimy oszacować resztę

$$|R_n| \leq \frac{|h|^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{(1-|h|)^n} = \frac{1}{n} \left(\frac{|h|}{1-|h|} \right)^n,$$

czyli dla $|h| \leq \frac{1}{2}$ mamy

$$\frac{|h|}{1-|h|} \leq 1 \Rightarrow |R_n| \rightarrow 0.$$

Mamy więc, dla $|x| \leq \frac{1}{2}$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Uwaga: Używając dokładniejszych oszacowań można pokazać, że powyższy wzór jest prawdziwy dla $x \in (-1, 1]$.

Przybliżone obliczanie wartości funkcji

Wykorzystamy wzór Taylora do obliczeń przybliżonych

(a) Obliczymy przybliżoną wartość liczby e

$$e = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \frac{e^\theta}{n!} \Rightarrow e \simeq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \quad \text{i błąd} \leq \frac{3}{n!}.$$

Przy okazji: e nie jest liczbą wymierną. Załóżmy, że e jest liczbą wymierną, i $e = \frac{m}{n}$, dla $m, n \in \mathbf{N}$. Wtedy

$$\begin{aligned} e = \frac{m}{n} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \\ \Rightarrow \left(\frac{m}{n} - 1 - 1 - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{n!} \right) \cdot n! &= \frac{e^\theta}{n+1}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że lewa strona jest liczbą całkowitą, czyli $\frac{e^\theta}{n+1}$ też musi być całkowita. To jest niemożliwe, bo $1 < e^\theta < 3$, czyli musielibyśmy mieć

$$\frac{1}{n+1} < \frac{e^\theta}{n+1} < \frac{3}{n+1}.$$

Jedyna możliwość to przypadek $n = 1$, czyli e musiałoby być liczbą naturalną, a łatwo sprawdzić, że nie jest.

(b) Obliczymy przybliżoną wartość $\sqrt[3]{9}$. Niech $f(x) = X^{\frac{1}{3}}$. Zauważmy, że $f(9) = f(8+1)$, a $f(8) = 2$. Policzmy kilka pochodnych

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}, & f''(x) &= (-1) \frac{1}{3} \frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}}, \\ f'''(x) &= \frac{1}{3} \frac{2}{3} \frac{5}{3} x^{-\frac{8}{3}}, & f^{(4)}(x) &= (-1) \frac{1}{3} \frac{2}{3} \frac{5}{3} \frac{8}{3} x^{-\frac{11}{3}}. \end{aligned}$$

Łatwo się domyśleć, że

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{1}{3} \frac{2}{3} \frac{5}{3} \dots \frac{3n-4}{3} x^{-\frac{3n-1}{3}}.$$

W takim razie

$$f^{(n)}(8) = (-1)^{n+1} \frac{2 \cdot 5 \dots (3n-4)}{3^n} 8^{-\frac{3n-1}{3}} = (-1)^{n+1} \frac{2 \cdot 5 \dots (3n-4)}{3^n 8^n} 2.$$

Wstawiając to do wzoru Taylora, z $n = 3$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{9} = f(8+1) &= f(8) + f'(8) + \frac{f''(8)}{2} + R_3 \\ &= 2 + \frac{1}{12} - \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 32} + R_3 \\ &= 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288} + R_3. \end{aligned}$$

Możemy oszacować błąd przybliżenia

$$\begin{aligned} |R_3| &\leq \frac{2 \cdot 5}{3! 3 \cdot 3 \cdot 3} \frac{1}{(8+\theta)^{\frac{8}{3}}} < \frac{10}{162} \frac{1}{8^{\frac{8}{3}}} = \frac{10}{162 \cdot 256} \\ &= \frac{10}{41472} < \frac{10}{40000} = \frac{1}{4000} = 0,00025. \end{aligned}$$

8 Całki

Funkcja pierwotna

Definicja 8.1. Funkcję $F(x)$ nazywamy funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, jeżeli $F(x)$ jest różniczkowalna i $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in D_f$.

Uwagi: (i) Funkcja $f(x)$ może nie mieć funkcji pierwotnej. Jeżeli ma funkcję pierwotną, to ma ich nieskończenie wiele:

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow (F(x) + c)' = F'(x) = f(x).$$

Jeżeli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, to $F(x) + c$ także jest funkcją pierwotną $f(x)$, dla dowolnej stałej c .

(ii) Jeżeli $F(x)$ i $G(x)$ są funkcjami pierwotnymi tej samej funkcji $f(x)$, to $(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$, dla każdego $x \in D_f$. Na każdym przedziale zawartym w D_f funkcje pierwotne $F(x)$ i $G(x)$ różnią się więc o stałą. Stała ta może być różna na różnych przedziałach.

Całka nieoznaczona

Definicja 8.2. *Jeżeli funkcja $f(x)$ ma funkcję pierwotną, to mówimy, że jest całkowalna. Dowolną funkcję pierwotną funkcji całkowalnej $f(x)$ nazywamy jej całką nieoznaczoną, i oznaczamy*

$$\int f(x) dx.$$

Określenie „całka nieoznaczona” odnosi się więc do całej rodziny funkcji, które na poszczególnych przedziałach D_f różnią się o stałą. Często podkreślamy to, dodając do otrzymanego wzoru na funkcję pierwotną stałą c . W oznaczeniu całki $\int \dots dx$ stanowi kompletny symbol, który zawsze powinien występować razem. dx podkreśla zmienną, względem której całka jest funkcją pierwotną. W przypadku, jeżeli funkcja „podcałkowa” zawiera ułamek, to człon dx często dopisujemy do licznika, na przykład

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x}.$$

Przykłady:

- (a) $\int 0 dx = c,$
- (b) $\int a dx = ax + c,$ dla dowolnej stałej $a,$
- (c) $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c \quad a \neq -1, x > 0,$
- (d) $\int \cos x dx = \sin x + c,$
- (e) $\int \sin x dx = -\cos x + c,$
- (f) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c,$
(stała c może być różna na różnych przedziałach),
- (g) $\int \frac{dx}{x} = \log |x| + c,$ (podobna uwaga odnośnie stałej),
- (h) $\int e^x dx = e^x + c.$

Dowód każdego z powyższych wzorów sprowadza się do obliczenia pochodnej prawej strony, i porównania z funkcją podcałkową. Zwróćmy uwagę na stałe

c dopisane po prawej stronie. Nie są one bardzo ważne (wiadomo, że dodanie stałej nie zmienia pochodnej), ale dobrze jest o nich pamiętać. Pamiętajmy, że jeżeli dziedzina funkcji podcałkowej składa się z więcej niż jednego przedziału, to zapis $+c$ we wzorze na całkę nieoznaczoną rozumiemy jako stałą, która może być różna na różnych przedziałach.

Ze wzorów na pochodne wynikają następujące wzory na całki nieoznaczone:

- (a) $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx,$
- (b) $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx, \quad a - \text{dowolna stała}$
- (c) $\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx,$
(tak zwany wzór na całkowanie przez części)
- (d) $\int (g \circ f)(x)f'(x) dx = \int g(y) dy \quad \text{przy czym } y = f(x),$
(tak zwany wzór na całkowanie przez podstawienie).

Przykłady: (a) Całka z wielomianu jest wielomianem, stopnia o jeden większego:

$$\begin{aligned} \int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) dx &= \\ &= \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + c. \end{aligned}$$

(b) Skorzystamy ze wzoru na całkowanie przez części:

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= \int (x)' \log x dx \\ &= x \log x - \int x (\log x)' dx \\ &= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \log x - \int 1 \cdot dx \\ &= x \log x - x + c. \end{aligned}$$

Sprawdzamy: $(x \log x - x + c)' = \log x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \log x.$

(c) skorzystamy ze wzoru na całkowanie przez podstawienie:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x dx \quad \text{niech } f(x) = 1+x^2 \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{f(x)} f'(x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy \quad f(x) = y \\
 &= \frac{1}{2} \log |y| + c \\
 &= \frac{1}{2} \log |1+x^2| + c \\
 &= \log \sqrt{1+x^2} + c.
 \end{aligned}$$

Zauważmy, że $(\log |x|)' = \frac{1}{x}$. Dla $x > 0$ wzór ten już znamy, a dla $x < 0$ mamy $|x| = -x$, więc

$$(\log |x|)' = (\log(-x))' = \frac{1}{(-x)} \cdot (-x)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

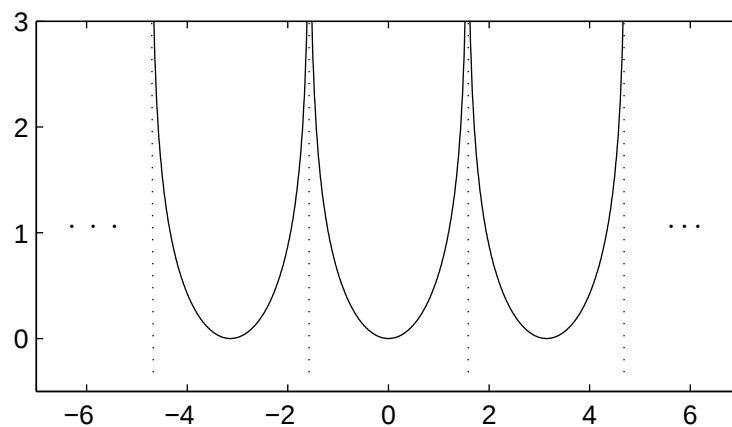
W tym przykładzie $1+x^2 > 0$, więc wartość bezwzględna nic nie zmienia. Sprawdźmy naszą całkę: $(\log \sqrt{1+x^2})' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{1+x^2}$, a więc zgadza się.

(d) Jeszcze raz wzór na całkowanie przez podstawienie

$$\begin{aligned}
 \int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\
 &= - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx \\
 &= - \int \frac{1}{f(x)} f'(x) dx \quad f(x) = \cos x \\
 &= - \int \frac{1}{y} dy \quad y = \cos x \\
 &= - \log |y| + c \\
 &= - \log |\cos x| + c.
 \end{aligned}$$

(e) Następującą całkę otrzymujemy natychmiast, jeżeli pamiętamy wzory na różniczkowanie funkcji cyklometrycznych:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c, \quad |x| < 1.$$



Rysunek 8.1: Wykres funkcji $f(x) = -\log |\cos x|$.

Jeżeli nie pamiętamy odpowiednich wzorów to możemy zastosować wzór na całkowanie przez podstawienie:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-f(t)^2}} f'(t) dt, \quad x = f(t) \\
 &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t dt, \quad f(t) = \sin t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= \int \frac{1}{\cos t} \cos t dt \\
 &= \int 1 dt \\
 &= t + c
 \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy z tego, że dla $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mamy $\cos t > 0$ a więc $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$. Skoro $x = \sin t$, to $t = \arcsin x$, i otrzymujemy ten sam wzór.

(f) Całkę z funkcji $\sin^2 x$ policzyny na dwa sposoby. Możemy skorzystać z tożsamości trygonometrycznej

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) + c \\ &= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c.\end{aligned}$$

Możemy też skorzystać ze wzoru na całkowanie przez części. Całkując przez części nie otrzymamy całki łatwiejszej do policzenia, ale otrzymamy równanie, które następnie rozwiążemy.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \int \sin x \cdot \sin x \, dx \\ &= \int \sin x \cdot (-\cos x)' \, dx \\ &= -\sin x \cos x + \int (\sin x)' \cos x \, dx \\ &= -\sin x \cos x + \int \cos x \cdot \cos x \, dx \\ &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx.\end{aligned}$$

To, co otrzymaliśmy jest równaniem na naszą szukaną całkę. Przenosząc całkę z prawej strony na lewą i dzieląc przez 2 otrzymujemy

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{-\sin x \cos x + x}{2}.$$

Całkowalność funkcji

Całkowanie funkcji wymiernych

Funkcje wymierne to funkcje postaci $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami. Ułamki proste to szczególny rodzaj funkcji wymiernych postaci

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}, \quad n=1, 2, \dots, \quad (8.1)$$

gdzie A, B, C, a, p i q to dowolne stałe, a wyrażenie kwadratowe $x^2 + px + q$ nie ma pierwiastka, czyli $p^2 - 4q < 0$. Okazuje się, że każdą funkcję wymierną można przedstawić jako sumę ułamków prostych plus, ewentualnie, wielomian. Z drugiej strony istnieją wzory na całki nieoznaczone ułamków prostych. W ten sposób otrzymujemy procedurę na obliczanie całek nieoznaczonych funkcji wymiernych.

Twierdzenie 8.3. *Każdą funkcję wymierną można przedstawić jako sumę wielomianu i ułamków prostych.*

Procedura rozkładu: Zamiast dowodu naszkicujemy procedurę rozkładu funkcji. Szkic ten można uściślić i zrobić z niego dowód, ale my pozostaniemy przy szkicu. Mając konkretną funkcję $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ najpierw dzielimy wielomiany $P(x)$ przez $Q(x)$ „z resztą”, to znaczy znajdujemy wielomiany $W(x)$ (iloraz) oraz $R(x)$ (reszta) takie, że

$$P(x) = W(x) \cdot Q(x) + R(x), \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

przy czym stopień reszty $R(x)$ jest mniejszy od stopnia $Q(x)$. Robimy to używając zwykłej procedury „długiego dzielenia”, czy „pisemnego dzielenia”, dokładnie tak samo, jak dzieląc liczby naturalne.

Przykłady: (a) $\frac{x^3-2x^2-1}{x^2-1} = (x-2) + \frac{x-3}{x^2-1}$

(b) $\frac{x^4-2x^3-35}{x^3-2x^2+3x-6} = x + \frac{-3x^2+6x-35}{x^3-2x^2+3x-6}$.

Po wydzieleniu części wielomianowej pozostaje nam ułamek $\frac{R(x)}{Q(x)}$, w którym licznik ma stopień niższy od mianownika. W następnym kroku przeprowadzamy faktoryzację mianownika, czyli rozkład mianownika na czynniki nierozkładalne. Czynniki nierozkładalnymi są wielomiany liniowe $(x-a)$ oraz kwadratowe (x^2+px+q) , nie posiadające rzeczywistych pierwiastków, czyli $p^2-4q < 0$. Przypomnijmy, że w przypadku wielomianów o współczynnikach zespolonych czynnikami nierozkładalnymi są jedynie wielomiany liniowe. Każdy wielomian stopnia wyższego niż 1 można dalej rozkładać na czynniki. W przypadku wielomianów o współczynnikach rzeczywistych mogą istnieć czynniki nierozkładalne (czyli, zgodnie z twierdzeniem Bezout, nie posiadające pierwiastków) stopnia wyższego niż 1, ale okazuje się, że takie czynniki nierozkładalne nie mogą mieć stopnia wyższego niż 2. Przeprowadzamy więc rozkład mianownika $Q(x)$ na czynniki nierozkładalne, i w efekcie przedstawiamy $Q(x)$ jako iloczyn wyrażeń postaci

$$(x-a)^n \quad \text{oraz} \quad (x^2+px+q)^n. \quad (8.2)$$

Rozkład mianownika na czynniki nierozkładalne to, w praktyce, główny problem w całkowaniu funkcji wymiernych. W zadaniach które będziemy robić albo faktoryzacja będzie bardziej lub mniej oczywista, albo będzie jawnie podana. W przykładach rozpatrywanych jako ilustracja procedury faktoryzacja jest prosta: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ oraz $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = (x - 2)(x^2 + 3)$. Jeżeli wielomian ma współczynniki całkowite, i współczynnik przy wyrazie o najwyższej potędze równy 1, to w pierwszej kolejności szukamy pierwiastków spośród dzielników wyrazu wolnego. Mając pierwiastek wydzielamy odpowiedni czynnik liniowy, i otrzymujemy wielomian niższego stopnia, który „obrabiamy” do skutku. Jeżeli wielomian nie ma pierwiastków musimy sobie radzić inaczej. Na przykład rozważmy wielomian $Q(x) = x^4 + 1$. Wiemy, że rozkłada się na iloczyn dwóch wielomianów kwadratowych, przy czym możemy tak dobrać stałe, aby ich wyrazy wiodące miały współczynniki 1. Piszemy więc najogólniejszą postać takiego rozkładu, a następnie mnożymy czynniki:

$$x^4 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a+c)x^3 + (b+d+ac)x^2 + (ad+bc)x + bd.$$

Porównując współczynniki po obu stronach otrzymujemy układ równań, który będzie można rozwiązać. W naszym przypadku łatwo znajdujemy rozwiązanie:

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

Mając rozkład mianownika na czynniki nierozkładalne postaci (8.2) możemy napisać prototyp rozkładu funkcji na ułamki proste. W pierwszym kroku wypisujemy wszystkie ułamki proste postaci (8.1) które znajdują się w rozkładzie, a w następnym kroku ustalimy stałe w licznikach. Dla każdego czynnika postaci $(x - a)^n$ w rozkładzie mianownika wypisujemy n ułamków prostych

$$\frac{A_1}{(x - a)} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x - a)^n},$$

natomiast dla każdego czynnika $(x^2 + px + q)^n$ w rozkładzie mianownika wypisujemy n ułamków

$$\frac{B_1x + C_1}{(x^2 + px + q)} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(x^2 + px + q)^n}.$$

Zauważmy, że wypisując powyższy rozkład wypisaliśmy dokładnie tyle nieoznaczonych (na razie) stałych A_i, B_i oraz C_i jaki jest stopień mianownika. Wypiszmy nasz rozkład dla rozważanych przykładów:

(a):

$$\frac{x - 3}{x^2 - 1} = \frac{x - 3}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1},$$

(b):

$$\frac{-3x^2 + 6x - 35}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6} = \frac{-3x^2 + 6x - 35}{(x-2)(x^2+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+3}.$$

Na ostatnim etapie rozkładu wyznaczamy stałe w licznikach ułamków prostych. W tym celu sumę wszystkich wymaganych ułamków prostych sprowadzamy do wspólnego mianownika, którym jest wielomian $Q(x)$. W liczniku otrzymamy wielomian stopnia niższego niż mianownik $Q(x)$ (gdyż wszystkie ułamki proste mają liczniki stopnia niższego niż mianowniki). Wielomian ten musi być identyczny z wielomianem $R(x)$, który jest licznikiem rozkładanej funkcji wymiernej. Oba wielomiany muszą więc mieć te same współczynniki. Daje to dokładnie n równań, gdyż wielomiany stopnia $n-1$ mają n współczynników. Mamy więc n równań liniowych, i n niewiadomych, i okazuje się, że układ ten zawsze można rozwiązać. Nie będziemy tego dowodzić, ale zobaczymy jak to działa na przykładach.

(a):

$$\frac{x-3}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + (A-B)}{(x-1)(x+1)},$$

czyli $A+B=1$ oraz $A-B=-3$. Otrzymujemy $A=-1$ i $B=2$, a więc w końcu

$$\frac{x-3}{x^2-1} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x+1}.$$

(b):

$$\begin{aligned} \frac{-3x^2 + 6x - 35}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6} &= \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+3} \\ &= \frac{A(x^2+3) + (Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+3)} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + (-2B+C)x + (3A-2C)}{(x-2)(x^2+3)}, \end{aligned}$$

czyli $A+B=-3$, $-2B+C=6$ oraz $3A-2C=-35$. Rozwiązując ten układ otrzymujemy $A=-5$, $B=2$ i $C=10$, i w końcu

$$\frac{-3x^2 + 6x - 35}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6} = \frac{-5}{x-2} + \frac{2x+10}{x^2+3}.$$

Wyznaczając stałe w rozkładzie na ułamki proste zakończyliśmy procedurę rozkładu. Jedyny punkt który wymaga uściślenia, żeby otrzymać dowód Twierdzenia 8.3 to fakt, że stałe zawsze da się wyznaczyć, innymi słowy, że powstały układ n równań liniowych z n niewiadomymi jest taki, że zawsze ma rozwiązanie. Zostawimy ten punkt jako zadanie dla zainteresowanego czytelnika.

Całkowanie ułamków prostych

Pierwszy rodzaj ułamków prostych daje się łatwo całkować. Mamy następujące wzory:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log|x-a| + c,$$
$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + c, \quad n > 1.$$

Ułamek prosty drugiego rodzaju rozłożymy na dwa inne:

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n} = \frac{B}{2} \cdot \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} + \frac{D}{(x^2+px+q)^n}, \quad D = C - \frac{1}{2}Bp. \quad (8.3)$$

Pierwszy z ułamków po prawej stronie całkujemy przez podstawienie $t = x^2 + px + q$,

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx = \int \frac{dt}{t^n} = \begin{cases} \log(x^2+px+q) + c & : n = 1, \\ \frac{-1}{(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} + c & : n > 1. \end{cases}$$

Zauważmy jeszcze, że ponieważ wyrażenie $x^2 + px + q$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, to jest zawsze dodatnie, więc wartość bezwzględna pod logarytmem nie jest potrzebna. Pozostał jeszcze jeden rodzaj ułamków do scałkowania, to znaczy drugi ułamek po prawej stronie (8.3). Wykonamy proste przekształcenie i podstawienie:

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dx}{\left((x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4})\right)^n} = \frac{\sqrt{a}}{a^n} \int \frac{dt}{(t^2+1)^n},$$

gdzie

$$t = \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{a}}, \quad a = q - \frac{p^2}{4} > 0.$$

Gdy $n = 1$ mamy

$$\int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + c,$$

natomiast dla $n > 1$ wyprowadzimy wzór rekurencyjny. Niech $k > 0$, wtedy, całkując przez części mamy

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^k} &= (t^2 + 1)^{-k} \cdot t' dt \\
 &= \int \frac{t}{(t^2 + 1)^k} - \int (-k) \frac{2t}{(t^2 + 1)^{k+1}} \cdot t dt \\
 &= \frac{t}{(t^2 + 1)^k} + 2k \int \frac{t^2}{(t^2 + 1)^{k+1}} dt \\
 &= \frac{t}{(t^2 + 1)^k} + 2k \int \left(\frac{t^2 + 1}{(t^2 + 1)^{k+1}} - \frac{1}{(t^2 + 1)^{k+1}} \right) dt \\
 &= \frac{t}{(t^2 + 1)^k} + 2k \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^k} - 2k \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^{k+1}}.
 \end{aligned}$$

Mamy więc

$$2k \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^{k+1}} = \frac{t}{(t^2 + 1)^k} + (2k - 1) \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^k},$$

czyli, dla $n > 1$

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n} = \frac{t}{2(n-1)(t^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^{n-1}}.$$

Możemy teraz obliczyć całki w obu rozważanych przez nas przykładach.

Przykłady: (a):

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx &= \int \left((x - 2) + \frac{2}{x + 1} - \frac{1}{x - 1} \right) dx \\
 &= \frac{x^2}{2} - 2x + 2 \log |x + 1| - \log |x - 1| + c.
 \end{aligned}$$

(b):

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^4 - 2x^3 - 35}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6} dx &= \int \left(x - \frac{5}{x - 2} + \frac{2x + 10}{x^2 + 3} \right) dx \\
 &= \frac{x^2}{2} - 5 \log |x - 2| + \int \frac{2x}{x^2 + 3} dx + \frac{10}{3} \int \frac{dx}{(\frac{x}{\sqrt{3}})^2 + 1} \\
 &= \frac{x^2}{2} - 5 \log |x - 2| + \log(x^2 + 3) + \frac{10}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} dx}{(\frac{x}{\sqrt{3}})^2 + 1} \\
 &= \frac{x^2}{2} - 5 \log |x - 2| + \log(x^2 + 3) + \frac{10}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right) + c.
 \end{aligned}$$

9 Całka oznaczona

Całka oznaczona, intuicyjnie, mierzy „wielkość funkcji”, w podobny sposób jak pole mierzy wielkość obszaru na płaszczyźnie. Niech będzie dana funkcja $f(x)$, nieujemna na odcinku $[a, b]$ i rozważmy obszar pod wykresem $f(x)$. Będziemy chcieli jakoś policzyć pole tego obszaru. Będziemy korzystali z własności pola które są intuicyjnie jasne, na przykład, że większy obszar ma większe pole. Niech $f(x) = x$ i rozważamy obszar nad odcinkiem $[0, a]$. Obszar ten jest trójkątem o wysokości i podstawie równych a . Pole wynosi więc $P = \frac{1}{2}a^2$. Rozważmy teraz obszar pod wykresem $f(x) = x^2$, nad tym samym odcinkiem $[0, a]$. Zbudujemy wielokąt wpisany w ten obszar, oraz wielokąt opisany na tym obszarze.

Rysunek 9.1: Obszary pod wykresem funkcji.

Pole obszaru musi być liczbą pomiędzy polami wielokąta mniejszego i większego. Niech $n \in \mathbf{N}$ i podzielmy odcinek $[0, a]$ na n odcinków równej długości: $[0, a] = [0, \frac{a}{n}] \cup [\frac{a}{n}, 2\frac{a}{n}] \cup \dots \cup [(n-2)\frac{a}{n}, (n-1)\frac{a}{n}] \cup [(n-1)\frac{a}{n}, a]$. Nad każdym z odcinków podziału $[k\frac{a}{n}, (k+1)\frac{a}{n}]$ zbudujemy mniejszy prostokąt o wysokości $f(\frac{ka}{n})$ oraz większy prostokąt o wysokości $f(\frac{(k+1)a}{n})$. Funkcja $f(x)$ jest rosnąca, więc istotnie drugi prostokąt jest większy niż pierwszy. Niech L_n będzie łącznym polem wszystkich mniejszych prostokątów, a U_n łącznym polem wszystkich większych.

$$L_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{ka}{n}\right) \frac{a}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{ka}{n}\right)^2 \frac{a}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{ka}{n}\right)^2 \frac{a}{n},$$
$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{(k+1)a}{n}\right) \frac{a}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(k+1)a}{n}\right)^2 \frac{a}{n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{ka}{n}\right)^2 \frac{a}{n}.$$

Każdy z mniejszych prostokątów zawiera się w obszarze pod wykresem, a więc także wielokąt będący ich sumą, którego pole jest równe L_n . Z kolei suma wszystkich większych prostokątów tworzy wielokąt o polu U_n , zawierający obszar pod wykresem. Jeżeli więc oznaczymy przez P pole obszaru pod wykresem, to musimy mieć

$$L_n \leq P \leq U_n,$$

Rysunek 9.2: Mniejszy wielokąt i większy wielokąt.

dla każdego $n \in \mathbf{N}$. Zauważmy, że L_n i U_n mają wspólną granicę, gdy $n \rightarrow \infty$. Skorzystamy ze wzoru

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6},$$

który można udowodnić indukcyjnie. Mamy więc

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k a}{n} \right)^2 \frac{a}{n} \\ &= \frac{a^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{a^3}{n^3} \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} \\ &= a^3 \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a^3 \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Podobnie,

$$U_n = L_n + a^2 \cdot \frac{a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a^3 \frac{1}{3}.$$

Widzimy więc, że pole obszaru pod wykresem musi być równe $P = \frac{a^3}{3}$.

Sumy dolne i sumy górne

Niech $f(x)$ będzie funkcją ograniczoną na przedziale $[a, b]$, i oznaczmy przez m i M ograniczenie $f(x)$ od dołu i od góry odpowiednio, czyli $m \leq f(x) \leq M$ dla $x \in [a, b]$. Niech P będzie dowolnym podziałem przedziału $[a, b]$ na pododcinki, czyli $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ (zbiór punktów podziału),

$$[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-2}, x_{n-1}] \cup [x_{n-1}, b].$$

Na każdym małym odcinku $[x_i, x_{i+1}]$ wprowadźmy oznaczenia

$$m_i = \inf\{f(x); x \in [x_i, x_{i+1}]\}, \quad M_i = \sup\{f(x); x \in [x_i, x_{i+1}]\}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Mamy więc $m \leq m_i \leq M_i \leq M$.

Rysunek 9.3: m_i oraz M_i .

Mając dany podział P napiszmy następujące sumy

$$L(P, f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i), \quad U(P, f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i).$$

$L(P, f)$ nazywamy sumą dolną, a $U(P, f)$ sumą górną podziału P . Zauważmy, że sumy te zależą od funkcji $f(x)$, przedziału $[a, b]$, oraz podziału P tego przedziału. Porównując to z poprzednim przykładem w którym obliczaliśmy pole pod wykresem widzimy, że jeżeli $f(x)$ jest nieujemna, to pole pod

wykresem jest liczbą większą lub równą od każdej sumy dolnej i mniejszą lub równą od każdej sumy górnej. Całkę dolną z funkcji $f(x)$ na przedziale $[a, b]$ definiujemy jako

$$\underline{\int_a^b f(x) dx} = \sup\{L(P, f); P - \text{podział } [a, b]\},$$

a całkę górną jako

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} = \inf\{U(P, f); P - \text{podział } [a, b]\}.$$

Definicja 9.1. Jeżeli całka dolna i całka górna funkcji $f(x)$ są równe, to mówimy, że $f(x)$ jest całkowalna na $[a, b]$ w sensie Riemanna, a wspólną wartość całki górnej i dolnej nazywamy całką Riemanna $f(x)$ na przedziale $[a, b]$ i oznaczamy

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Uwagi: (i) Zauważmy, że dla dowolnego podziału P mamy

$$\begin{aligned} L(P, f) &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i) \geq m \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = m(b-a), \\ U(P, f) &= \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i) \leq M \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = M(b-a). \end{aligned}$$

Całka, jeżeli istnieje, spełnia więc

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

(ii) Przypomnijmy, że definicja, którą podaliśmy wymaga, aby funkcja $f(x)$ była ograniczona, oraz aby $a < b$. Później wprowadzimy odpowiednie oznaczenia, aby granice całkowania a i b były dowolnymi liczbami, oraz opiszemy w jaki sposób można, czasami, całkować funkcje nieograniczone. Takie całki z funkcji nieograniczonych będziemy nazywać całkami niewłaściwymi.

(iii) Całka może nie istnieć. Niech $f(x)$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : x \in \mathbf{Q}, \\ 0 & : x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Wtedy, dla każdego podziału P i dla każdego i mamy $m_i = 0$ i $M_i = 1$, a więc zawsze $L(P, f) = 0$, $U(P, f) = (b - a)$, czyli

$$\underline{\int_a^b f(x) dx} = 0, \quad \text{ i } \quad \overline{\int_a^b f(x) dx} = b - a.$$

(iv) Całka Riemanna jest ściśle związana z pojęciem pola. Jeżeli $f(x)$ jest nieujemna, to całka jest równa polu pod wykresem, a jeżeli $f(x)$ jest niedodatnia, to całka jest równa polu nad wykresem, pod osią OX , ze znakiem minus.

(v) Całkę Riemanna będziemy też nazywać całką oznaczoną. W literaturze możemy spotkać też inne konstrukcje całki oznaczonej, ale my zajmujemy się tylko powyższą konstrukcją. Naszym celem obecnie będzie udowodnienie, że funkcje ciągłe są całkowne w sensie Riemanna. W tym celu udowodnimy kilka prostych twierdzeń.

Twierdzenie 9.2. *Całka dolna jest mniejsza lub równa całce górnej:*

$$\underline{\int_a^b f(x) dx} \leq \overline{\int_a^b f(x) dx}.$$

Dowód. Mamy pokazać, że każda suma dolna jest mniejsza lub równa od każdej sumy górnej. Niech więc $L(P_1, f)$ będzie sumą dolną związaną z podziałem P_1 , a $U(P_2, f)$ będzie sumą górną związaną z podziałem P_2 . Niech P^* będzie wspólnym rozdrobieniem podziałów P_1 i P_2 , czyli

$$P^* = P_1 \cup P_2.$$

Oznaczmy punkty poszczególnych podziałów następująco: $P_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$, $P_2 = \{y_1, \dots, y_k\}$ oraz $P^* = \{z_1, \dots, z_m\}$. Z definicji P^* wynika, że każdy punkt x_i i każdy punkt y_j są także elementami P^* . Zauważmy, że w związku z tym każdy przedział $[x_i, x_{i+1}]$ podziału P_1 i każdy przedział $[y_j, y_{j+1}]$ podziału P_2 są sumą pewnych przedziałów podziału P^* . Wynika stąd, że

$$L(P_1, f) \leq L(P^*, f) \leq U(P^*, f) \leq U(P_2, f).$$

Dwie skrajne nierówności wynikają z tego, że P^* jest rozdrobieniem P_1 i P_2 , natomiast nierówność środkowa jest prostą obserwacją, że suma dolna jest mniejsza lub równa sumie górnej, zbudowanej na tym samym podziale. $\square$

Mamy następujący wniosek:

Wniosek 9.3. *Jeżeli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje podział P taki, że*

$$U(P, f) - L(P, f) < \epsilon, \quad (9.1)$$

to $f(x)$ jest całkowalna, oraz, dla takiego podziału P zachodzą oszacowania

$$U(P, f) - \epsilon < \int_a^b f(x) dx < L(P, f) + \epsilon. \quad (9.2)$$

Dowód. Z definicji całek dolnej i górnej mamy, dla dowolnego podziału P

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} - \underline{\int_a^b f(x) dx} \leq U(P, f) - L(P, f).$$

Jeżeli spełniony jest warunek (9.1), to

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} - \underline{\int_a^b f(x) dx} < \epsilon.$$

Skoro jest to spełnione dla każdego $\epsilon > 0$, i skoro różnica całki górnej i dolnej jest nieujemna, to musi być równa zero. Funkcja $f(x)$ jest więc całkowalna. Z drugiej strony

$$\int_a^b f(x) dx \geq L(P, f) > U(P, f) - \epsilon,$$

i podobnie dla drugiej nierówności (9.2). □

Mamy następujące zasadnicze twierdzenie:

Twierdzenie 9.4. *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na $[a, b]$, to jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$.*

Dowód. Pokażemy najpierw, że $f(x)$ spełnia następujący warunek:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon. \quad (9.3)$$

Zauważmy, że powyższy warunek jest silniejszy niż ciągłość funkcji w każdym punkcie dziedziny. W przypadku ciągłości w każdym punkcie dziedziny stałą δ dobieramy do zadanego ϵ i dla ustalonego x_0 . Natomiast w powyższym warunku stała δ zależy tylko od zadanego ϵ , i jest dobrana wspólna dla wszystkich punktów dziedziny. Funkcję spełniającą warunek (9.3) nazywamy więc czasem „jednostajnie ciągłą”. Pokażemy teraz, że funkcja ciągła na

Rysunek 9.4: Funkcja ciągła, ale nie jednostajnie ciągła.

przedziale $[a, b]$ (zawierającym końce) spełnia (9.3), a więc jest jednostajnie ciągła.

Żeby podkreślić różnicę pomiędzy ciągłością a jednostajną ciągłością rozważmy funkcję $f(x) = \frac{1}{x}$ na przedziale $(0, 1]$. Wiemy, że funkcja ta jest ciągła na przedziale $(0, 1]$, ale nie jest jednostajnie ciągła, czyli nie spełnia warunku (9.3). Łatwo to zauważyć. Weźmy dowolną $\delta > 0$, dowolne $n \in \mathbf{N}$, $n > 4$ i niech $x = \frac{\delta}{n}$ oraz $y = x + \frac{\delta}{2}$. Wtedy $|x - y| = \delta/2 < \delta$, oraz

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{n}{\delta} - \frac{1}{\frac{\delta}{n} + \frac{\delta}{2}} = \frac{n}{\delta} \left(1 - \frac{2}{n+2} \right) > \frac{n}{2\delta},$$

gdyż dla $n > 4$ mamy $\frac{2}{n+2} < \frac{1}{2}$. Widzimy więc, że niezależnie od δ różnica $|f(x) - f(y)|$ może być dowolnie duża, pomimo, że $|x - y| < \delta$. Widzimy więc, że funkcja ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny może nie być jednostajnie ciągła. Wróćmy do naszej sytuacji, czyli niech funkcja $f(x)$ będzie ciągła na przedziale $[a, b]$. Załóżmy, że $f(x)$ nie jest jednostajnie ciągła, czyli warunek (9.3) nie jest spełniony, czyli

$$\exists \epsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in [a, b], \quad |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \epsilon_0.$$

Będziemy stosowali powyższy warunek dla $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$. Dla każdego n otrzymujemy więc parę liczb $x_n, y_n \in [a, b]$ spełniających $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, oraz $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$. Wiemy, że skoro ciąg $\{x_n\} \subset [a, b]$ to można wybrać podciąg $\{x_{n_k}\}$ zbieżny do pewnego $x_0 \in [a, b]$. Zauważmy, że wtedy podciąg $\{y_{n_k}\}$ też musi być zbieżny do x_0 :

$$x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k}.$$

W takim razie, z ciągłości $f(x)$ mamy $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$ oraz $f(y_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$, czyli $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \rightarrow 0$, czyli mamy sprzeczność z warunkiem $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon_0 > 0$. Tym samym udowodniliśmy, że $f(x)$ spełnia (9.3).

Całkowalność będziemy chcieli pokazać korzystając z Wniosku 9.3. Niech więc $\epsilon > 0$ będzie dowolne, i niech $\delta > 0$ będzie liczbą daną przez (9.3), dla $\epsilon' = \frac{\epsilon}{b-a}$. Niech $n \in \mathbf{N}$ będzie dane wzorem $n = \lfloor \frac{b-a}{\delta} \rfloor + 1$. Podzielmy przedział $[a, b]$ na n równych odcinków punktami podziału

$$P = \left\{ x_i = a + (b-a) \frac{i}{n}; \ i = 0, 1, \dots, n \right\}.$$

Zauważmy, że długość każdego odcinka podziału jest mniejsza niż δ , $\frac{(b-a)}{n} < \delta$, gdyż $n > \frac{(b-a)}{\delta}$. Jeżeli więc $x, y \in [x_i, x_{i+1}]$, to $|x - y| \leq \delta$ czyli $|f(x) - f(y)| < \epsilon'$. Kresy też więc muszą spełniać $M_i - m_i < \epsilon' = \frac{\epsilon}{(b-a)}$. Wynika z tego, że

$$\begin{aligned} U(P, f) - L(P, f) &= \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \\ &< \frac{b-a}{n} \cdot \frac{\epsilon}{b-a} \cdot n \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Ponieważ ϵ było dowolne, to z Wniosku 9.3 otrzymujemy, że $f(x)$ jest całkowalna. $\square$

Uwaga: Powyższy dowód można trochę wzmocnić, i pokazać, że jeżeli $f(x)$ ma skończenie wiele punktów nieciągłości w $[a, b]$ to też jest całkowalna.

Sumy Riemanna

Założmy, że mamy funkcję $f(x)$ na przedziale $[a, b]$, podział tego przedziału $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$, oraz niech w każdym przedziale podziału wybrany będzie punkt t_i :

$$t_i \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Utwórzmy sumę

$$R = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i). \quad (9.4)$$

Sumę taką nazywamy sumą Riemanna. Zależy ona od konkretnego podziału, i od wyboru punktów t_i . Zauważmy, że zawsze zachodzi

$$L(P, f) \leq R \leq U(P, f),$$

jeżeli suma Riemanna też zbudowana jest na podziale P . Wynika to z faktu, że $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, oraz

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} \leq f(t_i) \leq \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} = M_i.$$

Dla podziału $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ określamy jego średnicę $d(P)$:

$$d(P) = \max\{(x_{i+1} - x_i); i = 0, \dots, n-1\}.$$

Mamy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 9.5. *Niech $f(x)$ będzie ciągła na $[a, b]$, i niech dany będzie ciąg podziałów $\{P_n\}$ odcinka $[a, b]$ taki, że średnice dążą do zera: $d(P_n) \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$. Niech R_n będzie ciągiem sum Riemanna związanych z podziałami P_n . Innymi słowy, dla każdego podziału P_n mamy niezależnie wybrane punkty $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$, i utworzoną sumę (9.4). Wtedy*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \int_a^b f(x) dx.$$

Uwaga: To twierdzenie daje swobodę w interpretacji całki jako granicy sum. Bardzo często jako t_i wybieramy lewy albo prawy koniec przedziału $[x_i, x_{i+1}]$, albo jego środek, nie martwiąc się, gdzie funkcja przyjmuje swoją wartość najmniejszą i największą. Ale pamiętajmy: $f(x)$ musi być ciągła.

Dowód twierdzenia. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 9.4 zauważmy, że funkcja $f(x)$ ciągła na $[a, b]$ spełnia warunek (9.3) (czyli jest jednostajnie ciągła). Weźmy dowolne $\epsilon > 0$ i niech $\delta > 0$ będzie dane przez (9.3) dla $\epsilon' = \frac{\epsilon}{(b-a)}$ (podobnie jak w dowodzie twierdzenia 9.4), oraz niech $n_0 \in \mathbf{N}$ będzie wystarczająco duże, tak, aby

$$\forall n \geq n_0 \quad d(P_n) < \delta.$$

Wtedy dla $n \geq n_0$ mamy

$$U(P_n, f) - L(P_n, f) < \epsilon.$$

Z (9.2) mamy

$$\int_a^b f(x) dx - \epsilon < L(P_n, f) \leq \int_a^b f(x) dx,$$

oraz

$$\int_a^b f(x) dx \leq U(P_n, f) < \int_a^b f(x) dx + \epsilon,$$

czyli

$$\left| L(P_n, f) - \int_a^b f(x) dx \right| < \epsilon, \quad \left| U(P_n, f) - \int_a^b f(x) dx \right| < \epsilon.$$

Skoro ϵ było dowolne, a powyższe nierówności zachodzą dla wszystkich $n \geq n_0$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(P_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n, f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Z drugiej strony, jak wiemy

$$L(P_n, f) \leq R_n \leq U(P_n, f),$$

a więc także

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \int_a^b f(x) dx.$$

□

Przykład: Obliczmy następującą granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \frac{1}{\sqrt{n+6}} + \frac{1}{\sqrt{n+9}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{7n}} \right) \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Spróbujemy przekształcić wyrażenie, żeby sprowadzić je do postaci sumy Riemanna jakiejś funkcji, dla jakiegoś przedziału, jakiegoś podziału tego przedziału, i jakiegoś wyboru punktów t_i .

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \frac{1}{\sqrt{n+6}} + \frac{1}{\sqrt{n+9}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{7n}} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{\sqrt{n+3i}} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= \sum_{i=0}^{2n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+3i}} \frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{\sqrt{1+3\frac{i}{n}}} \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{1+3\frac{i}{n}}} \end{aligned}$$

Można się już wszystkiego domysleć: jest to suma Riemanna dla funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+3x}}$, dla przedziału $[0, 2]$, podziału równomiernego na $2n$ podprzedziałów równej długości $\frac{1}{n}$, i dla punktów t_i będących prawymi końcami podprzedziałów. Poza sumę wyrzuciliśmy składnik $\frac{1}{n}$, który nie należy do schematu sumy Riemanna, ale i tak jest zbieżny do zera. Skoro zidentyfikowaliśmy wyrazy naszego ciągu jako sumy Riemanna, a średnice podziałów odpowiadających kolejnym wyrazom ciągu dążą do zera, to ciąg ten zbiega do całki oznaczonej

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+3x}} = \left. \frac{2\sqrt{1+3x}}{3} \right|_0^2 = \frac{2}{3}\sqrt{7} - \frac{2}{3}\sqrt{1} = \frac{2}{3}(\sqrt{7} - 1).$$

Mamy następujące twierdzenie

Twierdzenie 9.6. (i) Jeżeli $f(x)$, $f_1(x)$ i $f_2(x)$ są całkowalne na $[a, b]$ a c jest stałą, to $(f_1 + f_2)(x)$ oraz $cf(x)$ też są całkowalne, dla dowolnej stałej c , oraz

$$\begin{aligned} \int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx &= \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx \\ \int_a^b c f(x) dx &= c \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

(ii) Jeżeli $f_1(x)$ i $f_2(x)$ są całkowalne na $[a, b]$ i $f_1(x) \leq f_2(x)$ to

$$\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx. \quad (9.5)$$

(iii) Jeżeli $f(x)$ jest całkowalna na $[a, b]$ oraz $a < c < b$, to $f(x)$ jest też całkowalna na każdym z podprzedziałów $[a, c]$ i $[c, b]$, oraz

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (9.6)$$

Również na odwrót: jeżeli $f(x)$ jest całkowalna na przedziałach $[a, c]$ i $[c, b]$ ($a < c < b$), to jest też całkowalna na $[a, b]$, i zachodzi (9.6).

(iv) Jeżeli $f(x)$ jest całkowalna na $[a, b]$, to $|f(x)|$ też jest całkowalna na $[a, b]$, i

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Uwaga: Część (ii) można trochę wzmocnić, i udowodnić, że jeżeli dodatkowo $f_1(x) < f_2(x)$ poza skończoną ilością punktów przedziału $[a, b]$ ($a < b$), to nierówność (9.5) też jest ostra. Dowód w zasadzie jest ten sam.

Dowód twierdzenia. (i) Niech dany będzie podział P odcinka $[a, b]$. Wtedy

$$L(P, f_1) + L(P, f_2) \leq L(P, f_1 + f_2) \leq U(P, f_1 + f_2) \leq U(P, f_1) + U(P, f_2).$$

A więc

$$U(P, f_1 + f_2) - L(P, f_1 + f_2) \leq U(P, f_1) - L(P, f_1) + U(P, f_2) - L(P, f_2). \quad (9.7)$$

Skoro $f_1(x)$ i $f_2(x)$ są całkowalne, to dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieją podziały P_1 i P_2 takie, że

$$U(P_1, f_1) - L(P_1, f_1) < \epsilon/2, \quad U(P_2, f_2) - L(P_2, f_2) < \epsilon/2.$$

Jeżeli P^* jest wspólnym rozdrobnieniem podziałów P_1 i P_2 , to nierówności zachowują się dla P^* , a więc z (9.5)

$$U(P^*, f_1 + f_2) - L(P^*, f_1 + f_2) < \epsilon.$$

Ponieważ $\epsilon > 0$ było dowolne, to $f_1(x) + f_2(x)$ jest całkowna (Wniosek 9.3), i dodatkowo

$$\begin{aligned} \int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx &\leq U(P^*, f_1 + f_2) \\ &\leq U(P^*, f_1) + U(P^*, f_2) \\ &\leq \int_a^b f_1(x) dx + \epsilon/2 + \int_a^b f_2(x) dx + \epsilon/2 \\ &= \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \epsilon. \end{aligned}$$

Skoro $\epsilon > 0$ było dowolne, to

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx \leq \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx.$$

Przeciwną nierówność pokazujemy podobnie, wykorzystując $L(P^*, f_1 + f_2)$.

Niech $c > 0$. Wtedy, oczywiście $L(P, cf) = cL(P, f)$ i $U(P, cf) = cU(P, f)$. W takim razie

$$U(P, cf) - L(P, cf) = c(U(P, f) - L(P, f)).$$

Podobnie, jeżeli $c < 0$ to $L(P, cf) = cU(P, f)$ i $U(P, cf) = cL(P, f)$, i

$$U(P, cf) - L(P, cf) = c(L(P, f) - U(P, f)) = |c|(U(P, f) - L(P, f)).$$

W obu przypadkach dla $\epsilon > 0$ znajdujemy podział P taki, że

$$U(P, f) - L(P, f) < \frac{\epsilon}{|c|} \Rightarrow U(P, cf) - L(P, cf) < \epsilon.$$

Oczywiście, jeżeli $c = 0$ to $cf(x) \equiv 0$, więc jest całkowalna, i całka jest równa 0. W każdym przypadku otrzymujemy tezę. Zauważmy, że jako wniosek z powyższego otrzymujemy także

$$\int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx.$$

(ii) Mamy

$$\int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (9.8)$$

Łatwo zauważyć, że jeżeli $f(x) \geq 0$ dla każdego $x \in [a, b]$ to dla dowolnego podziału P $L(P, f) \geq 0$, a więc jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna, to jej całka musi być ≥ 0 . W takim razie jeżeli $f_1(x) \leq f_2(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$, to wielkość (9.8) jest ≥ 0 , i otrzymujemy

$$\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx.$$

(iii) Niech $\epsilon > 0$, i niech P będzie podziałem przedziału $[a, b]$, takim, że

$$U(P, f) - L(P, f) < \epsilon \quad (9.9)$$

Dodajmy punkt c do punktów podziału P , i otrzymane tak rozdrobnienie oznaczmy przez P^* . Ponieważ P^* jest rozdrobnieniem P , to (9.9) zachodzi też dla P^* . Niech P_1 i P_2 będą częściami podziału P^* wpadającymi do $[a, c]$ i $[c, b]$ odpowiednio. P_1 i P_2 są więc podziałami przedziałów $[a, c]$ i $[c, b]$. Zauważmy, że

$$L(P^*, f) = L(P_1, f) + L(P_2, f), \quad \text{oraz} \quad U(P^*, f) = U(P_1, f) + U(P_2, f).$$

Podstawiając to do (9.9) otrzymujemy

$$(U(P_1, f) - L(P_1, f)) + (U(P_2, f) - L(P_2, f)) = U(P^*, f) - L(P^*, f) < \epsilon.$$

Każda z wielkości w nawiasach po lewej stronie jest nieujemna, więc każda z osobna jest $< \epsilon$. Ponieważ $\epsilon > 0$ było dowolne, więc funkcja $f(x)$ jest całkowna na przedziałach $[a, c]$ i $[c, b]$. Korzystając z oszacowania z wniosku 9.3 otrzymujemy dodatkowo

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &< U(P^*, f) = U(P_1, f) + U(P_2, f) \\ &< \int_a^c f(x) dx + \epsilon + \int_c^b f(x) dx + \epsilon \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx + 2\epsilon.\end{aligned}$$

Powyższa nierówność jest prawdziwa dla dowolnego $\epsilon > 0$, więc musi zachodzić

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Nierówność w drugą stronę pokazujemy tak samo, wykorzystując sumy dolne, i oszacowania z wniosku 9.3. Musi więc zachodzić równość całek.

(iv) Niech $c = \pm 1$, w zależności od znaku całki, a więc

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = c \int_a^b f(x) dx = \int_a^b c f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

gdzie $c f(x) \leq |c f(x)| = |f(x)|$. □

Następne dwa twierdzenia pokazują związek całki oznaczonej z całką nieoznaczoną i z różniczkowaniem.

Twierdzenie 9.7. *Niech $f(x)$ będzie funkcją całkowną na przedziale $[a, b]$. Dla $x \in [a, b]$ określamy*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Wtedy $F(x)$ jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna w każdym punkcie x_0 ciągłości funkcji podcałkowej $f(x)$, oraz, w takim x_0 mamy

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Dowód. Skoro $f(x)$ jest całkowna, to musi być ograniczona, $|f(x)| \leq M$, a więc dla dowolnych $x, y \in [a, b]$, $x < y$ zachodzi oszacowanie

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \int_x^y |f(t)| dt \leq M(y - x).$$

Wynika z tego, że $F(x)$ jest ciągłą, a nawet jednostajnie ciągłą na $[a, b]$. Niech $x_0 \in (a, b)$. Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolne, i $\delta > 0$ będzie takie, że dla $|t - x_0| < \delta$ mamy

$$|f(t) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Zauważmy, że skoro $f(x_0)$ jest stałą niezależną od t , więc możemy napisać

$$f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt,$$

dla dowolnego h takiego, że $[x_0, x_0 + h] \subset [a, b]$. Dla $0 < h < \delta$ możemy więc napisać

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - f(x_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \\ &\leq \frac{1}{h} \cdot h \cdot \epsilon \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Podobnie, dla $-\delta < h < 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{-1}{h} \int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt - f(x_0) \right| \\ &= \left| \frac{-1}{h} \int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt - \frac{-1}{h} \int_{x_0+h}^{x_0} f(x_0) dt \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0+h}^{x_0} (f(t) - f(x_0)) dt \right| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Widzimy więc, że granica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$$

istnieje, i jest równa $f(x_0)$. □

Z powyższego twierdzenia wynika natychmiast następujący wniosek, na który czekamy już od poprzedniego rozdziału:

Wniosek 9.8. *Funkcja ciągła na przedziale ma na nim funkcję pierwotną.*

Następujące twierdzenie jest głównym narzędziem do liczenia całek oznaczonych. Samo twierdzenie jest proste i dosyć oczywiste, i jest znane jako zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego.

Twierdzenie 9.9 (Zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego). *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna na przedziale $[a, b]$ (w sensie Riemanna), oraz istnieje funkcja pierwotna $F(x)$, czyli*

$$F'(x) = f(x) \quad x \in (a, b),$$

(czyli $f(x)$ jest całkowalna w sensie definicji 8.2), to

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

Zwróćmy uwagę na symbol $F(x)|_a^b$, oznacza on przyrost funkcji $F(x)$ pomiędzy a i b , i będziemy go używać w przyszłości.

Dowód. Niech $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ będzie dowolnym podziałem przedziału $[a, b]$. Dla każdego przedziału $[x_i, x_{i+1}]$ podziału stosujemy twierdzenie o wartości średniej, a więc istnieje $t_i \in (x_i, x_{i+1})$ takie, że

$$f(t_i) = \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

A więc

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (F(x_{i+1}) - F(x_i)) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

Dla każdego podziału P prawdziwe są więc nierówności

$$L(P, f) \leq F(b) - F(a) \leq U(P, f).$$

$F(b) - F(a)$ leży więc pomiędzy całką dolną i całką górną funkcji $f(x)$ na $[a, b]$. Skoro funkcja jest całkowalna, to musi więc być równe całce. $\square$

Granice całkowania

Całkę oznaczoną zdefiniowaliśmy na przedziale $[a, b]$, dla $a < b$. Dolna granica całkowania była więc mniejsza od górnej. Wygodnie jest rozszerzyć tę definicję. Wprowadźmy więc następujące oznaczenia. Jeżeli $a < b$ to

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx,$$

oraz dla dowolnego c

$$\int_c^c f(x) dx = 0.$$

Przy tak dobranych oznaczeniach wzór (9.6) zachodzi niezależnie od wzajemnych relacji pomiędzy liczbami a, b, c

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad \forall a, b, c,$$

jeżeli tylko wszystkie całki istnieją. Dowód można przeprowadzić rozpatrując przypadki.

Całkowanie przez części

Twierdzenie 9.9 daje nam następujące wzory na całki oznaczone. Jeżeli $F'(x) = f(x)$ i $G'(x) = g(x)$ na przedziale $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)G(x) dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g(x) dx.$$

Wzór ten zachodzi jeżeli którakolwiek z całek istnieje (wtedy obie istnieją).

Przykład:

$$\int_1^e \log x dx = \int_1^e x' \log x dx = x \log x|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e - x|_1^e = e - e + 1 = 1.$$

Całkowanie przez podstawienie

Jeżeli $f(x)$ jest funkcją różniczkowalną na $[a, b]$, to

$$\int_a^b g(f(x)) f'(x) dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy, \quad (9.10)$$

przy czym, tak jak poprzednio, wzór ten zachodzi, jeżeli którakolwiek z całek istnieje — wtedy obie istnieją.

Przykład: W następującej całce podstawiamy $g(x) = \sin x$ oraz $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x \sin x^2 dx &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin(x^2) 2 \cdot x dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{0^2}^{\pi^2} \sin y dy = -\frac{1}{2} \cos y \Big|_0^{\pi^2} = \frac{1 - \cos(\pi^2)}{2}.\end{aligned}$$

Bardzo często całkujemy przez podstawienie w następujący sposób, stosując wzór (9.10) „od tyłu”:

$$\begin{aligned}\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx &= \left\{ x = (t+1)^2 \Rightarrow dx = 2(t+1) dt \right\} = \\ &= \int_{\sqrt{4}-1}^{\sqrt{9}-1} \frac{t+1}{t} \cdot 2 \cdot (t+1) dt = 2 \int_1^2 \frac{t^2 + 2t + 1}{t} dt.\end{aligned}$$

Ostatnią całkę łatwo już policzyć, znajdując funkcję pierwotną. Zapis $dx = 2(t+1) dt$ oznacza po prostu $\frac{dx}{dt} = 2(t+1)$. Zauważmy, że powyższy rachunek jest całkowicie uzasadniony, i wynika ze wzoru (9.10). Wystarczy zauważyć, że funkcja $x = (t+1)^2$ jest odwracalna na przedziale $[1, 2]$, i odwrotna do niej to funkcja $t = \sqrt{x} - 1$ na przedziale $[4, 9]$. Czasem, stosując ten sposób odstawiania możemy wpaść w pułapkę. Na przykład

$$\int_{-2}^2 x^2 dx = \left\{ x^2 = t \Rightarrow 2x dx = dt \right\} = \int_4^4 \frac{1}{2} \sqrt{t} dt = 0,$$

choć z drugiej strony wiemy, że całka po lewej stronie jest równa $\frac{16}{3} > 0$. W zadaniach sytuacja może nie być tak oczywista, więc zawsze warto dokładnie sprawdzić rachunki, szczególnie w sytuacji, gdy robimy podstawienie, a funkcja podstawiana nie jest odwracalna.

10 Zastosowania całek

Wiele wartości fizycznych, „namacalnych”, intuicyjnie zrozumiałych można opisać jako granice sum. Taką granicę sum można często zinterpretować jako granicę ciągu sum Riemanna dla pewnej funkcji, i w takim razie daną wielkość fizyczną zinterpretować jako całkę oznaczoną z jakiejś funkcji. Całkę taką możemy następnie obliczyć korzystając ze znanych sposobów całkowania. Omówimy kilka przykładów.

Długość łuku

Niech funkcja $f(x)$, określona na przedziale $[a, b]$ będzie ciągła, różniczkowalna, oraz niech jej pochodna będzie ciągła na (a, b) . Obliczymy długość krzywej na płaszczyźnie, będącej wykresem funkcji $f(x)$, czyli krzywej $\{(x, f(x)); x \in [a, b]\}$. Długość krzywej określamy jako granicę długości łamanych, przybliżających krzywą. Innymi słowy, wybieramy na krzywej ciąg węzłów, a następnie łączymy sąsiednie węzły ze sobą odcinkiem. Powstaje łamana, której długość obliczamy. Następnie zagęszczamy węzły na krzywej i znowu liczymy długość powstałej łamanej. Powstały w ten sposób ciąg łamanych, jeżeli odległości sąsiednich węzłów zbiegają do zera, powinny mieć długości zbieżne. Granicę tych długości przyjmujemy za długość krzywej. Krzywa może nie mieć długości. W przypadku który rozpatrujemy, to znaczy krzywej będącej wykresem odpowiednio regularnej funkcji długość istnieje, i wyraża się przez całkę.

Rysunek 10.1: Przybliżenie krzywej łamaną.

W przypadku naszej krzywej każda łamana z węzłami na wykresie $f(x)$ nad przedziałem $[a, b]$ wiąże się z podziałem $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$. Punkty podziału są rzutami na oś OX węzłów łamanej. Długość takiej łamanej, związanej z podziałem P dana jest wzorem

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right)^2}. \end{aligned}$$

Funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w każdym przedziale $[x_i, x_{i+1}]$, a więc z twierdzenia o wartości średniej w każdym takim przedziale istnieje punkt t_i taki, że

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(t_i).$$

Mamy więc

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sqrt{1 + f'(t_i)^2}.$$

Długość łamanej jest więc sumą Riemanna funkcji ciągłej $\sqrt{1 + f'(x)^2}$. Zagęszczanie węzłów łamanej daje zagęszczanie otrzymanych podziałów, a jeżeli maksymalna odległość sąsiednich węzłów dąży do zera, to również maksymalna odległość ich rzutów (czyli średnica związanych z nimi podziałów) dąży do zera. W takim razie, korzystając z Twierdzenia 9.5 sumy Riemanna zbiegają do całki

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad (10.1)$$

Całka L reprezentuje długość wykresu $f(x)$. Jak wspomnieliśmy już wcześniej krzywa może nie mieć długości. Właśnie uzasadniliśmy natomiast, że wykres funkcji mającej ciągłą pochodną ma długość, i długość ta dana jest całką (10.1).

Przykład: $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in [-1, 1]$. Jest to tak zwana „linia łańcuchowa”. Giętka, ale nierozciągliwa lina (na przykład łańcuch) zaczepiona na końcach, i zwisająca swobodnie, przyjmie kształt wykresu funkcji $\cosh x$, oczywiście odpowiednio rozciągniętego w poziomie i pionie. Taki kształt uważany jest za bardzo solidny. Na przykład słynny łuk w St. Louis nad rzeką Missisipi ma kształt linii łańcuchowej (do góry nogami).

Dla tej funkcji mamy

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

Wiemy też, że $\sinh' x = \cosh x$ oraz że funkcje hiperboliczne spełniają tak zwaną „jedynekę hiperboliczną”

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Możemy więc obliczyć długość wykresu

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\cosh^2 x} dx = \\ &= \int_{-1}^1 \cosh x dx = \sinh x \Big|_{-1}^1 = \frac{e^1 - e^{-1}}{2} - \frac{e^{-1} - e^1}{2} = e - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Rysunek 10.2: Linia łańcuchowa i łuk w St. Louis.

Objętość bryły obrotowej wokół osi OX

Niech będzie dana funkcja $f(x)$ na odcinku $[a, b]$, ciągła i nieujemna. Obracając obszar pod wykresem $f(x)$ wokół osi OX otrzymujemy tak zwaną bryłę obrotową

Rysunek 10.3: Bryła obrotowa.

Objętość tej bryły możemy przybliżyć przy pomocy walców, powstałych przez obrót prostokątów wokół osi OX .

Wyberzmy podział $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$. Niech, dla $i = 0, \dots, n-1$

$$m_i = \inf\{f(x); x_i \leq x \leq x_{i+1}\}, \quad M_i = \sup\{f(x); x_i \leq x \leq x_{i+1}\}.$$

Rysunek 10.4: Przybliżanie objętości walcami.

Rozważmy „plasterkę” bryły obrotowej wokół przedziału $[x_i, x_{i+1}]$. Walec o promieniu m_i jest całkowicie zawarty w tym plasterku, natomiast walec o promieniu M_i zawiera plasterkę w całości w swoim wnętrzu. Wynika z tego, że objętość takiego plasterka (oznaczymy ją przez V_i) musi być liczbą pomiędzy objętościami tych dwóch walców, czyli

$$(x_{i+1} - x_i) \pi m_i^2 \leq V_i \leq (x_{i+1} - x_i) \pi M_i^2,$$

czyli objętość V całej bryły obrotowej, składającej się ze wszystkich „plasterków” spełnia

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \pi m_i^2 \leq V \leq \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \pi M_i^2.$$

Sumy po lewej i prawej stronie powyższej podwójnej nierówności są sumami dolną i górną funkcji $\pi f^2(x)$, dla podziału P . Ponieważ nierówności te zachodzą dla wszystkich podziałów, a funkcja $\pi f^2(x)$ jest całkowalna (bo jest ciągła), więc V musi być równe całce

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Przykład: Rozważmy torus o dużym promieniu R i małym r ($0 < r < R$). Torus taki możemy przedstawić jako bryłę obrotową powstałą z obrotu koła

$$x^2 + (y - R)^2 \leq r^2 \tag{10.2}$$

Rysunek 10.5: Torus.

wokół osi OX . Obszar (10.2) nie jest obszarem pod wykresem funkcji, ale możemy go przedstawić jako różnicę dwóch takich obszarów, i w ten sposób przedstawić torus jako różnicę dwóch brył obrotowych, których objętości potrafimy obliczyć przy pomocy całek. Większą bryłę otrzymujemy jako obrót obszaru pod górnym półokręgiem a mniejszą jako obrót obszaru pod dolnym półokręgiem. Górny i dolny półokrąg są wykresami funkcji

$$f_1(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}, \quad f_2(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \leq x \leq r.$$

Rysunek 10.6: Obszar (10.2) jako różnica dwóch obszarów.

Mamy więc wzór na objętość torusa:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-r}^r f_1^2(x) dx - \pi \int_{-r}^r f_2^2(x) dx \\
 &= \pi \int_{-r}^r (f_1^2(x) - f_2^2(x)) dx \\
 &= \pi \int_{-r}^r (f_1(x) - f_2(x))(f_1(x) + f_2(x)) dx \\
 &= \pi \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2} \cdot 2 \cdot R dx \\
 &= 4R\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.
 \end{aligned}$$

Ostatnią całkę możemy obliczyć stosując podstawienie $x = \sin t$, ale zauważmy szybko, że wykresem funkcji podcałkowej jest górny półokrąg okręgu o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu r . Całka, jako pole obszaru pod wykresem, to w takim razie połowa pola koła o promieniu r , czyli $\frac{\pi r^2}{2}$. Otrzymaliśmy więc następujący wzór na objętość torusa:

$$V = 2\pi^2 R r^2.$$

Pole powierzchni bryły obrotowej wokół osi OX

Rozważmy obecnie pole powierzchni bocznej bryły obrotowej opisanej w poprzednim punkcie. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna, jej pochodna jest ciągła na (a, b) , i ma skończone granice na końcach a, b (do obliczenia objętości wystarczyło, żeby $f(x)$ była ciągła). Ponownie rozważmy podział $P = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ odcinka $[a, b]$, i „plasterek” bryły obrotowej wokół przedziału $[x_i, x_{i+1}]$. Powierzchnię boczną plasterka przybliżymy powierzchnią boczną stożka ściętego (nie walca), powstałego przez obrót obszaru pod sieczną wykresu wokół osi OX .

Powstały stożek ścięty ma promienie podstaw $f(x_i)$ i $f(x_{i+1})$, oraz wysokość $x_{i+1} - x_i$. Jak wiadomo z geometrii pole powierzchni bocznej takiego stożka ściętego jest równa długości „tworzącej” razy średni obwód.

Jeżeli ktoś nie pamięta tego wzoru, to może sobie taki wzór wyprowadzić, rozcinając stożek, i rozplaszczając rozciętą ściankę boczną. W naszym przypadku stożka ściętego nad przedziałem $[x_i, x_{i+1}]$ średni obwód czyli obwód w połowie wysokości to

$$2\pi \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2},$$

Rysunek 10.7: Stożek przybliżający bryłę obrotową.

Rysunek 10.8: Tworząca i średni obwód stożka ściętego.

a długość „tworzącej” to

$$\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}.$$

Łączna powierzchnia boczna wszystkich stożków przybliżających bryłę jest więc dana wzorem

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi \left(\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \right) \times \\ \times (x_{i+1} - x_i) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right)^2}. \quad (10.3)$$

Korzystając z twierdzenia o wartości średniej powyższą sumę możemy zapisać jako

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2\pi \left(\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \right) \cdot (x_{i+1} - x_i) \cdot \sqrt{1 + f'(t_i)^2}, \quad (10.4)$$

dla odpowiednich punktów $t_i \in (x_i, x_{i+1})$. Ponieważ $f(x)$ jest jednostajnie ciągła to dla każdego $\epsilon > 0$

$$\left| \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} - f(t_i) \right| < \epsilon$$

jeżeli tylko średnica podziału P jest odpowiednio mała. Z naszych założeń wynika też, że $f'(x)$ jest ograniczona, a więc sumę (10.3), która jest równa (10.4) można zastąpić sumą

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(t_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \cdot \sqrt{1 + f'(t_i)^2}, \quad (10.5)$$

z błędem dowolnie małym, jeżeli średnica podziału P jest odpowiednio mała. Suma (10.5) jest sumą Riemanna funkcji ciągłej $2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}$, a więc sumy Riemanna dążą do całki z tej funkcji, gdy średnice podziałów dążą do zera, a więc pole S powierzchni bocznej powstałej bryły obrotowej jest równe

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Przykład: Obliczymy pole powierzchni torusa, którego objętość obliczyliśmy w poprzednim punkcie. Wiemy, że torus można zapisać jako bryłę powstałą z obrotu koła

$$x^2 + (y - R)^2 \leq r^2$$

wokół osi OX , a w takim razie pole powierzchni bocznej torusa jest równa sumie sumie pól powierzchni bocznych brył powstałych przez obrót górnego i dolnego półokręgu:

$$S = 2\pi \int_{-r}^r f_1(x) \sqrt{1 + f_1'(x)^2} dx + 2\pi \int_{-r}^r f_2(x) \sqrt{1 + f_2'(x)^2} dx,$$

gdzie, jak poprzednio

$$f_1(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}, \quad f_2(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Mamy więc

$$f_1'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

i podobnie

$$f_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Obie pochodne różnią się więc tylko znakiem, i mamy

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + f_1'(x)^2} &= \sqrt{1 + f_2'(x)^2} = \\ &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

Ostatecznie więc

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-r}^r \left((R + \sqrt{r^2 - x^2}) \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} + (R - \sqrt{r^2 - x^2}) \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right) dx \\ &= 4\pi Rr \int_{-r}^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\ &= 4\pi R \int_{-r}^r \frac{dx}{\sqrt{1 - (\frac{x}{r})^2}} \\ &= 4\pi Rr \int_{-r}^r \frac{\frac{1}{r} dx}{\sqrt{1 - (\frac{x}{r})^2}} \quad y = \frac{x}{r} \\ &= 4\pi Rr \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} \\ &= 4\pi Rr \arcsin y \Big|_{-1}^1 \\ &= 4\pi^2 Rr. \end{aligned}$$

11 Całki niewłaściwe

Całkę oznaczoną zdefiniowaliśmy dla funkcji ograniczonych na skończonym przedziale $[a, b]$. Teraz definicję tę rozszerzymy na funkcje niekoniecznie ograniczone i na przedziały nieskończone. Całki takie nazywamy całkami niewłaściwymi. Najpierw rozważmy przypadek funkcji, która nie jest ograniczona na przedziale $[a, b]$, ale jest ograniczona, i całkowalna, na każdym podprzedziale postaci $[c, b]$, $a < c < b$. Można więc obliczyć całkę na przedziałach tej postaci, i zapytać się czy takie całki są zbieżne do czegoś gdy $c \rightarrow a^+$. Jeżeli istnieje granica

$$g = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx, \quad (11.1)$$

to mówimy, że funkcja $f(x)$ jest całkowalna w sensie niewłaściwym na przedziale $[a, b]$, albo że całka niewłaściwa po $[a, b]$ jest zbieżna. Granicę g oznaczamy, oczywiście, przez

$$\int_a^b f(x) dx = g = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx,$$

i nazywamy całką niewłaściwą $f(x)$ po $[a, b]$. Podobnie zdefiniowana jest całka niewłaściwa gdy funkcja $f(x)$ ma „osobliwość” w prawym końcu przedziału całkowania (czyli nie jest ograniczona w otoczeniu tego końca, i najczęściej nie jest też w tym punkcie określona). Całka niewłaściwa istnieje (jest zbieżna) jeżeli $f(x)$ jest całkowalna na każdym przedziale $[a, c]$, gdzie $a < c < b$, oraz istnieje granica

$$g = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx. \quad (11.2)$$

Uwaga: Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna na $[a, b]$ to oczywiście granice (11.1) i (11.2) istnieją, i są równe całce w zwykłym sensie. Całka niewłaściwa jest więc rozszerzeniem definicji całki zwykłej.

Całkę niewłaściwą możemy też zdefiniować w sytuacjach, gdy funkcja $f(x)$ ma „osobliwości” na obu końcach przedziału całkowania $[a, b]$, lub w jednym lub kilku punktach wewnętrznych przedziału. Najpierw dzielimy przedział całkowania na podprzedziały tak, aby w każdym podprzedziale funkcja $f(x)$ miała tylko jedną „osobliwość”, na jednym z końców. Na przykład, jeżeli badamy całkowalność funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ na przedziale $[-1, 1]$, to rozpatrujemy osobno zbieżność całek

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x} \quad \text{oraz} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x}, \quad (11.3)$$

i jeżeli **obie** powyższe całki są zbieżne, to mówimy, że całka niewłaściwa po przedziale $[-1, 1]$ istnieje. Zauważmy, że w tym konkretnym przypadku żadna z powyższych całek nie jest zbieżna (przykład (b)).

Przykłady: (a) Rozpatrzmy $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na przedziale $[0, 1]$. Funkcja ta jest ciągła na $(0, 1]$, ale ma „osobliwość” w 0. Sprawdzamy więc

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_{\epsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left. \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right|_{\epsilon}^1 = 2(1 - \sqrt{\epsilon}) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 2,$$

czyli całka niewłaściwa jest zbieżna, i

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = 2.$$

(b) Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{1}{x}$ na przedziale $[-1, 1]$. Funkcja ta ma jedną osobliwość w punkcie 0 wewnątrz przedziału całkowania. Musimy sprawdzić zbieżność każdej z całek niewłaściwych (11.3) osobno. Sprawdźmy najpierw całkę po $[0, 1]$

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x} = \log x|_{\epsilon}^1 = 0 - \log \epsilon = \log \frac{1}{\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} \infty.$$

Nie ma potrzeby sprawdzania zbieżności drugiej całki z (11.3) (też jest zresztą rozbieżna). Skoro jedna z całek (11.3) nie jest zbieżna, to całka po całym przedziale $[-1, 1]$ nie istnieje.

Drugi rodzaj całek niewłaściwych dotyczy nieskończonego przedziału całkowania. Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowna w każdym przedziale $[a, M]$, dla pewnego a i każdego $M > a$. Jeżeli istnieje granica

$$g = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) dx,$$

to mówimy, że $f(x)$ jest całkowna w sensie niewłaściwym na $[a, \infty)$ i piszemy

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = g = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) dx.$$

Podobnie definiujemy całkę niewłaściwą po przedziale $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^b f(x) dx,$$

o ile każda z całek po prawej stronie równości istnieje (w sensie właściwym), oraz istnieje granica. W końcu całkę na całej prostej $(-\infty, \infty)$ definiujemy jako sumę

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx,$$

o ile obie całki po prawej stronie, niezależnie od siebie, istnieją. Zauważmy, że definicja ta nie zależy od punktu b w którym rozdzielamy półprostą.

W końcu możemy połączyć oba rodzaje całek niewłaściwych, i całkować po przedziale nieskończonym funkcję która ma „osobliwości” w pewnych punktach. Przedział całkowania dzielimy na podprzedziały tak, aby funkcja w

każdym podprzedziale skończonym miała tylko jedną „osobliwość” na którymś końcu, oraz żeby na nieskończonych nie miała żadnych osobliwości, i następnie sprawdzamy zbieżność każdej z całek niewłaściwych osobno. Na przykład, istnienie całki niewłaściwej z funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na całej prostej $(-\infty, \infty)$ oznacza istnienie każdej z całek niewłaściwych

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}, \quad \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^2}, \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

W tym konkretnym przypadku całki pierwsza i ostatnia są zbieżne, ale druga i trzecia są rozbieżne, więc całka niewłaściwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \quad \text{nie istnieje.}$$

Przykłady: (a) Funkcje $\frac{\sin x}{x}$ i $\frac{|\sin x|}{x}$ są ciągłe na półprostej $[0, \infty)$ (wartości w 0 ustalamy na 1). Pierwsza jest całkowalna w sensie niewłaściwym na tej półprostej, a druga nie jest.

Rysunek 11.1: Funkcje $\frac{\sin x}{x}$ i $\frac{|\sin x|}{x}$.

Weźmy dowolne $M > 0$, i rozważmy

$$\int_0^{2\pi M} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{2\pi[M]} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{2\pi[M]}^{2\pi M} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Gdy $M \rightarrow \infty$ druga całka po prawej stronie ma granicę 0, gdyż długość przedziału całkowania nie przekracza 2π , a wartość funkcji podcałkowej jest ograniczona przez $\frac{1}{2\pi[M]}$ co dąży do 0 gdy $M \rightarrow \infty$. W takim razie mamy

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi M} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi[M]} \frac{\sin x}{x} dx, \quad (11.4)$$

istnienie jednej granicy pociąga za sobą istnienie drugiej. Zajmiemy się w takim razie granicą po prawej stronie, i pokażemy, że istnieje. Rozłóżmy całkę:

$$\int_0^{2\pi[M]} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{k=0}^{[M]-1} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (11.5)$$

Przyjrzyjmy się wyrazom szeregu:

$$\begin{aligned} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{2\pi k+\pi}^{2\pi(k+1)} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x+2k\pi} dx - \int_0^\pi \frac{\sin x}{x+(2k+1)\pi} dx, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$ oraz $\sin(x+(2k+1)\pi) = -\sin(x)$. Kontynuując, mamy

$$\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\pi \sin x \left(\frac{1}{x+2k\pi} - \frac{1}{x+(2k+1)\pi} \right) dx$$

Zauważmy, że całka jest dodatnia, gdyż funkcja podcałkowa jest dodatnia wewnątrz przedziału całkowania. Szereg (11.5) ma więc dodatnie wyrazy, i jest zbieżny (czyli jest zbieżna całka po lewej stronie (11.5)) dokładnie wtedy, gdy jest ograniczony. Oszacujmy jeszcze ostatnią całkę. Dla $k > 0$ mamy

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin x \left(\frac{1}{x+2k\pi} - \frac{1}{x+(2k+1)\pi} \right) dx &= \\ &= \int_0^\pi \sin x \frac{\pi}{(x+2k\pi) \cdot (x+(2k+1)\pi)} dx \leq \\ &\leq \frac{\pi}{4\pi^2 k^2} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{1}{2\pi k^2}, \end{aligned}$$

natomiast dla $k = 0$ oszacujmy brutalnie

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \leq 2\pi.$$

Mamy więc

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi[M]} \frac{\sin x}{x} dx &\leq 2\pi + \sum_{k=1}^{[M]-1} \frac{1}{2\pi k^2} \\ &= 2\pi + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{[M]-1} \frac{1}{k^2} \\ &< 2\pi + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Jak już wspomnieliśmy lewa strona jest niemalejącą funkcją M , i jest ograniczona, czyli ma granicę, gdy $M \rightarrow \infty$. Granice (11.4) istnieją więc, a więc całka niewłaściwa

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

jest zbieżna. Można pokazać (ale to wymaga zupełnie innych narzędzi), że całka ta jest równa $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Całka ta jest ważna, i pojawia się w zastosowaniach. Istnienie jej zawdzięczamy temu, że „pagórki” sinusa występują na przemian powyżej i poniżej osi OX , i ich pola się skracają. Natomiast suma wszystkich pól „pagórków” wykresu jest nieskończona. Innymi słowy, po nałożeniu wartości bezwzględnej na funkcję podcałkową całka niewłaściwa nie istnieje. Żeby się o tym przekonać, weźmy dowolne $M > 0$, i obliczmy

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi M} \frac{|\sin x|}{x} dx &\geq \int_0^{\pi[M]} \frac{|\sin x|}{x} dx \\ &= \sum_{k=0}^{[M]-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\ &= \sum_{k=0}^{[M]-1} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x + k\pi} dx \\ &> \sum_{k=0}^{[M]-1} \frac{1}{k\pi + \pi} \int_0^\pi \sin x dx \\ &= \sum_{k=1}^{[M]} \frac{2}{k\pi}. \end{aligned}$$

Gdy $M \rightarrow \infty$ to $[M] \rightarrow \infty$ i w takim razie

$$\int_0^{\pi M} \frac{|\sin x|}{x} dx \rightarrow \infty,$$

czyli całka niewłaściwa nie jest zbieżna.

(b) Pokażemy, że całka z funkcji $f(x) = e^{-x^2}$ na całej prostej $(-\infty, \infty)$ jest zbieżna. Pokażemy najpierw, że całka po półprostej dodatniej istnieje. Niech $M > 0$. Ponieważ funkcja podcałkowa jest dodatnia, to całka

$$\int_0^M e^{-x^2} dx \tag{11.6}$$

rośnie wraz z M , więc granica gdy $M \rightarrow \infty$ istnieje, jeżeli całki te są wspólnie ograniczone od góry dla wszystkich M .

$$\begin{aligned}\int_0^M e^{-x^2} dx &= \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^M e^{-x^2} dx \\ &\leq \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^M e^{-x} dx \\ &= \int_0^1 e^{-x^2} dx - e^{-x} \Big|_1^M \\ &= \int_0^1 e^{-x^2} dx + e^{-1} - e^{-M} \\ &< \int_0^1 e^{-x^2} dx + e^{-1}.\end{aligned}$$

Całki (11.6) stanowią więc ograniczoną i rosnącą funkcję M , mają więc granicę gdy $M \rightarrow \infty$. Rozważmy teraz drugą całkę niewłaściwą. Skorzystamy z parzystości funkcji podcałkowej. Niech $M > 0$.

$$\int_{-M}^0 e^{-x^2} dx = - \int_M^0 e^{-x^2} dx = \int_0^M e^{-x^2} dx,$$

czyli, jak przed chwilą udowodniliśmy, całki te mają granicę gdy $M \rightarrow \infty$. Całki niewłaściwe funkcji e^{-x^2} po przedziałach $(-\infty, 0]$ i $[0, \infty)$ istnieją, a więc istnieje całka niewłaściwa po całej prostej. Można pokazać, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

ale wymaga to dodatkowych narzędzi. Funkcja e^{-x^2} to tak zwana funkcja Gaussa, i jest jedną z ważniejszych funkcji w matematyce i zastosowaniach.

(c) Niech $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$. Jeżeli obrócimy wykres tej funkcji wokół osi OX , to otrzymamy nieskończony „lejek”. Obliczymy objętość tego „lejka”, i jego pole powierzchni bocznej. Stożek jest nieskończony, i zauważmy, że pasuje dokładnie do naszych całek niewłaściwych. Jego objętość jest równa granicy objętości lejków uciętych, i jego pole powierzchni bocznej jest granicą pól powierzchni bocznych lejków z uciętą „końcówką”. Widzimy więc, że wielkości te wyrażają się całkami niewłaściwymi, i istnienie tych wielkości wiąże się z istnieniem całek niewłaściwych

$$V = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx, \quad S = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1'}{x}\right)^2} dx.$$

Rysunek 11.2: Nieskończony „lejek”.

Policzmy te całki.

$$V = \lim_{M \rightarrow \infty} \pi \int_1^M \frac{1}{x^2} dx = \pi \lim_{M \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \Big|_1^M = \pi \lim_{M \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{M} + 1 \right) = \pi.$$

Widzimy więc, że całka niewłaściwa jest zbieżna, a więc objętość nieskończonego „lejka” jest skończona i wynosi π . Obliczmy teraz pole powierzchni bocznej

$$\begin{aligned} 2\pi \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)'}^2 dx &= 2\pi \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \geq \\ &\geq 2\pi \int_1^M \frac{1}{x} dx = 2\pi \log x \Big|_1^M = 2\pi \log M \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Widzimy więc, że całka niewłaściwa nie istnieje. Pole powierzchni bocznej „lejka” jest więc nieskończone. Wbrew pozorom, moglibyśmy jednak pomalować taki lejek farbą, pomimo nieskończonej powierzchni. Wystarczy π litrów farby nalać do środka lejka. Wnętrze — to chyba jasne — w całości się pomaluje.

Wzory Wallisa i Stirlinga

Wykorzystamy tę okazję, żeby udowodnić wzór Stirlinga. Wzór ten stosuje się do przybliżonego obliczania silni, która jest czasem potrzebna w zastosowaniach, na przykład w statystyce. Silnia tylko pozornie jest łatwa w obliczeniu. W praktyce liczenie jej z definicji jest niemożliwe, za dużo

działań. Najpierw udowodnimy następujący wzór, znany jako wzór Wallisa.

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2.$$

Wzór Wallisa zastosujemy w dowodzie wzoru Stirlinga. Mamy, dla $n \geq 2$