

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 1

2.10.08

- (1) Znajdź rozwinięcia dziesiętne ułamków postaci $\frac{n}{k}$ dla $n = 1, 2, 3$ oraz $k = 8, 11, 13$. Od czego zależy długość okresu? Podać przykład rozwinięcia o okresie długości 10.
- (2) Pokaż, że rozwinięcie

$$x = 0,1234567891011121314151617181920212223 \dots$$

złożone z kolejnych liczb naturalnych, nie jest okresowe.

Wskazówka: Uzasadnij, że w powyższym rozwinięciu są miejsca, w których występują po kolei dwa zera, trzy zera, cztery zera, itd., czyli że istnieją dowolnie długie „odcinki” złożone z samych zer.

- (3) Podaj trzy pierwsze cyfry po przecinku liczby $\sqrt[3]{7}$.
- (4) Pokaż, że następujące liczby są niewymierne: $\sqrt{k}$ gdzie $k = 56, 35, 24$ oraz $\sqrt[n]{k}$ dla $n = 5, k = 7, 8, 10$.
- (5) Udowodnij że zbiór liczb całkowitych nie jest ograniczony ani od góry ani od dołu.

Wskazówka: Wykorzystać aksjomat Archimedesesa.

- (6) Pokaż, że żadna liczba wymierna nie jest najmniejszym ograniczeniem od góry zbioru tych liczb wymiernych x , które spełniają warunek $x^3 < 10$.

Uwaga: Chodzi tylko o liczby wymierne.

- (7) Korzystając z definicji znajdź kresy górny i dolny odcinka otwartego $(1, 2)$.

(8) Znajdź kresy górny i dolny zbioru

$$\left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{k}; n, k \in \mathbf{N} \right\}.$$

(9) Znajdź kresy górny i dolny zbioru

$$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$$

złożonego z odwrotności kolejnych liczb naturalnych.

(10) Znajdź kresy górny i dolny zbioru

$$A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 < 2\}$$

(11) Udowodnij, że liczba $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ jest niewymierna.

(12) Udowodnij, że liczba $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{6}$ jest niewymierna.

(13) Bez pomocy kalkulatora znajdź części całkowite liczb postaci $(\sqrt[3]{4})^n$ dla $n = 1, 2, \dots, 15$.

Wskazówka: Wypisz sześciiany kolejnych liczb naturalnych oraz kolejne potęgi czwórki i porównaj je ze sobą

(14) Udowodnij, że każdym przedziale otwartym (a, b) istnieje liczba niewymierna.

(15) Udowodnij, że dowolne liczby rzeczywiste x, y spełniają nierówność

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

(16) Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ prawdziwa jest nierówność

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

(17) Znajdź kresy górny i dolny zbioru

$$\{x + y : x, y > 0, [x] + [y] = 3\}.$$

(18) Wykaż, że

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}, \quad \min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2},$$

gdzie $\max\{x, y\}$ oznacza większą z liczb x i y , a $\min\{x, y\}$ mniejszą z tych liczb.

- (19) Niech a, b będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Znajdź kresy zbioru liczb postaci

$$a \cos(x) + b \sin(x),$$

gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą.

- (20) Pokaż, że $|a - b - c| \geq |a| - |b| - |c|$

- (21) Niech $x = 1,0234107\dots$, $y = 1,0235106\dots$ Czy jest prawdą, że

(a) $1,02 < x \leq 1,03$?

(b) $x + y > 2,04692$?

(c) $x < y$?

- (22) Opisz na osi liczb rzeczywistych zbiory

(a) $\{x : |x - 3| < 2\}$,

(b) $\{x : |x - 1| < |x + 1|\}$

(c) $\{x : |a + 1| < |x - a| < |x + 1|\}$.

- (23) Rozwiąż następujące równania:

(a) $|x + 1| = |x - 1|$,

(b) $|1 - 2x| + |2x - 6| = x$.

- (24) Udowodnij następujący wzór:

$$\cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(n + \frac{1}{2})\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha} - 1 \right).$$

Wskazówka: Spróbuj indukcji.