

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 3

16.10.08

- (1) Znajdź 10 kolejnych wyrazów oraz granicę ciągu $\{a_n\}$ określonego wzorem: $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$.
- (2) Jakie wartości przyjmuje ciąg dany wzorem: $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$?
A ciąg dany wzorem: $a_n = \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}$?
- (3) Ciąg Fibonacciego określony jest rekurencyjnie w sposób następujący: $F_1 = F_2 = 1$, a następnie $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Znajdź wyrazy ciągu Fibonacciego o numerach od 3 do 12. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość: $F_{n+2} \cdot F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.
- (4) Znajdź pierwszych 12 wyrazów ciągu $\{a_n\}$ określonego, podobnie jak ciąg Fibonacciego, rekurencyjnie wzorem: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, ale z początkiem $a_1 = 1, a_2 = 3$; to samo dla $a_1 = 1, a_2 = 4$.
- (5) Udowodnij, korzystając z definicji, zbieżność ciągów, znajdując ich granice:
- (a) $a_n = \frac{1}{n^2}$, (b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, (c) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,
(d) $a_n = \frac{n+2}{n-1}$, (e) $a_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}}$,
(f) $a_n = \frac{3n^3 - 2n^2 - 7n + 5}{4n^3 + n - 6}$, (g) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
- (6) Udowodnij, że jeśli x jest liczbą rzeczywistą o rozwinięciu dziesiętnym

$$\beta, \alpha_1 \alpha_2 \cdots,$$

to ciąg określony wzorem

$$a_n = \beta, \alpha_1 \cdots \alpha_n$$

jest zbieżny do x (, jest punktem dziesiętnym, a $\beta \in \mathbf{Z}$).

(7) Udowodnij z definicji, że ciąg stały $a_n = a$ jest zbieżny do granicy a .

(8) Udowodnij, że granica sumy (różnicy, ilorazu) ciągów zbieżnych jest sumą (różnicą, ilorazem) ich granic. Oczywiście w przypadku ilorazu zakładamy, że ciąg w mianowniku ma wyrazy różne od zera, i że jego granica jest różna od zera.

(9) Zbadaj monotoniczność następujących ciągów:

$$(a) a_n = n + \frac{1}{n}, \quad (b) a_1 = 3, a_{n+1} = a_n^2 - 2,$$

$$(c) a_n = \sqrt[n]{n!}, \quad (d) a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$$

$$(e) a_n = \frac{2^n}{n!}, \quad (f) a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n}.$$

(10) Oblicz granice (być może niewłaściwe) ciągów:

$$(a) a_n = \frac{7n + (\sqrt[3]{n}\sqrt[6]{n})^5\sqrt{9n+1}}{11n^3 + 7n + 3}, \quad (b) a_n = \sqrt{n^2 + n} - n,$$

$$(c) a_n = \frac{\sin n}{n}, \quad (d) a_n = r^n, r > 0,$$

$$(e) a_n = \sqrt[n]{r}, 0 < r < 1, \quad (f) a_n = 2^n - \frac{1}{n},$$

$$(g) a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n + 2}, \quad (h) a_n = \frac{1 + 2 + 4 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 9 + \dots + 3^n},$$

$$(i) a_n = \frac{1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots - 2n}{\sqrt{n^2 + 2}},$$

$$(j) a_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}, \quad (k) a_n = \frac{1 + 3 + 9 + \dots + 3^n}{3^n},$$

$$(l) a_n = \sqrt{3^n + 2^n}\sqrt{3^n + 1}, \quad (m) a_n = \sqrt[n^2]{n},$$

$$(n) a_n = \sqrt[n]{n^2}, \quad (o) a_n = n(\sqrt{n^2 + 7} - n),$$

$$(p) a_n = \frac{n^2 + n + 1}{(n + \sin n)^2},$$

$$(q) a_n = \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1} + \frac{n^2 + 2}{n^3 + 2} + \frac{n^2 + 3}{n^3 + 3} + \dots + \frac{n^2 + n}{n^3 + n},$$

$$(r) a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{(n + 1)^2},$$

$$(s) a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+7} - \sqrt{n}}.$$

- (11) Wypisz wzorem ciąg, dla którego $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, i każdy z wyrazów jest średnią harmoniczną dwóch wyrazów sąsiednich:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}} \right), \quad n \geq 2.$$

- (12) Wypisz wzorem ciąg, dla którego $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, i każdy z wyrazów jest średnią geometryczną dwóch wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}, \quad n \geq 2.$$