

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 5

30.10.08

(1) Oblicz sumy częściowe $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, a następnie znajdź $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$:

(a) $a_k = \frac{1}{a_k}$, (b) $a_k = \frac{2^k + 5^k}{10^k}$.

(2) Udowodnij, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 2.

(3) Rozstrzygnij, czy następujące szeregi są zbieżne:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$, (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n}{n^2 + 1}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n - 1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n - 3)}$, (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - 1}{n^3 + 6n^2 + 8n + 47}$,

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n - 1) \cdot 2^{2n-1}}$, (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n - 1}$,

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}}$, (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + 1)(n + 4)}$,

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)!}$, (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$, (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n - 1)!!}{3^n n!}$,

($k!!$ oznacza iloczyn wszystkich liczb naturalnych nie większych od k o tej samej parzystości), (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n + 1}\right)^n$,

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^3}}{3^n}$, (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n - 1)\sqrt{n + 1}}$,

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n + 1}{n}}$, (q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$, (r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n - 1}$,

(s) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$, (t) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n}$, (u) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{\sqrt[10]{n!}}$,

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 + \arctan n}$, (w) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2^n}}$, (x) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \pi}{n^\pi + e}$.

(4) Które z następujących szeregów są zbieżne, a które są zbieżne

absolutnie:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 3^n}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$,
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n+1}{n}$, (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+4)(n+9)}}$,
(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{10^n}}{3^{2^n}}$, (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot (-5)^n}{n^n \cdot 2^n}$,
(h) $1-1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\dots+1-\overbrace{\frac{1}{k}-\frac{1}{k}-\dots-\frac{1}{k}}^{k \text{ razy}}+\dots$,
(i) $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{k}-\overbrace{\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2}-\dots-\frac{1}{k^2}}^{k \text{ razy}}+\dots$,
(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^3}{2^n}$, (k) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$, (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n^2}}{n!}$,
(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 77n}{n^2}$, (n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+17}{3^n}$, (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!+1}}{n!}$,
(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{(n+3)^{1/4}}$, (q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} (-1)^n$,
(r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$, (s) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\sqrt{4^n+3^n}}$,
(t) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5\sqrt{n}+27}$, (u) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n!}$, (v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{4^{\binom{n}{2}}}$,
(w) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/n}}$, (x) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}$, (y) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$,
(z) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(\log n)^{\log n} (-1)^n}{n^{\log \log n}}$, (ż) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\arctan n}$,
(ż) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) (-1)^n$.