

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 8

20.11.08

- (1) Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Korzystając z definicji oblicz $f'(8)$.
- (2) Niech $f(x) = x^5$. Korzystając z definicji wyprowadź wzór na $f'(x)$.
- (3) Niech $n \in \mathbf{N}$. Dobierz stałe a, b, c tak, aby funkcja

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & : |x| \geq 1/n, \\ ax^2 + bx + c & : |x| < 1/n \end{cases}$$

była różniczkowalna. Oblicz pochodną $f'_n(x)$, naszkicuj wykres funkcji $f_n(x)$ oraz wykres pochodnej.

- (4) Oblicz pochodną następujących funkcji. Podaj w jakim zbiorze istnieje pochodna:

(a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$, (b) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$,

(c) $f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}$, (d) $f(x) = (1 + \sqrt{x})(1 + x^{1/3})(1 + x^{1/4})$,

(e) $f(x) = (x^2 + 1)^4$, (f) $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$,

(g) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, (h) $f(x) = (1 + 2x)^{30}$,

(i) $f(x) = \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)^{1/3}$, (j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^4 - x^8}}$,

(k) $f(x) = 2^{x+3}$, (l) $f(x) = x10^x$,

(m) $f(x) = \frac{x}{e^x}$, (n) $f(x) = x^2(x + 1)e^x$,

(o) $f(x) = e^x \log x$, (p) $f(x) = \frac{\log x}{e^x}$,

(q) $f(x) = e^{x^2}$, (r) $f(x) = x^{10} \log x$, (s) $f(x) = e^{e^x}$,

(t) $f(x) = \log \log x$, (u) $f(x) = \log_{10}(x - 1)$,

(v) $f(x) = 10^{2x-3}$, (w) $f(x) = 2^{3^x}$,

(x) $f(x) = \log_2 |\log_3(\log_5 x)|$, (y) $f(x) = e^{\sqrt{\log x}}$,

$$\begin{aligned}
& \text{(z)} \quad f(x) = x^{x^2}, & \text{(aa)} \quad f(x) = x^{x^x}, & \text{(ab)} \quad f(x) = x^{\sqrt{x}}, \\
& \text{(ac)} \quad f(x) = (\log x)^x, & \text{(ad)} \quad f(x) = e^{-x^2} \log x, \\
& \text{(ae)} \quad f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{10}, & \text{(af)} \quad f(x) = x^5(x^6 - 8)^{1/3}, \\
& \text{(ag)} \quad f(x) = e^{2x+3} \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right), & \text{(ah)} \quad f(x) = \log \frac{1}{1+x}, \\
& \text{(ai)} \quad f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}}, & \text{(aj)} \quad f(x) = |x|^3, \\
& \text{(ak)} \quad f(x) = \operatorname{sgn} x, & \text{(al)} \quad f(x) = 0 \text{ dla } x < 0, = x^2 \text{ dla } x \geq 0, \\
& \text{(am)} \quad f(x) = e^{-|x|}, & \text{(an)} \quad f(x) = \sqrt{\sqrt{1+x^2} - 1}, \\
& \text{(ao)} \quad f(x) = \{x\}, & \text{(ap)} \quad f(x) = x \text{ dla } x < 0, = x^2 \text{ dla } x \geq 0, \\
& \text{(aq)} \quad f(x) = \operatorname{sgn}(x^5 - x^3), & \text{(ar)} \quad f(x) = \frac{\pi^{10}}{\pi - e}, \\
& \text{(as)} \quad f(x) = e^x \text{ dla } x < 0, = 1 + x \text{ dla } x \geq 0, \\
& \text{(at)} \quad f(x) = x^7 + e^2, & \text{(au)} \quad f(x) = (x + e)^{20}, \\
& \text{(av)} \quad f(x) = e^e.
\end{aligned}$$

(5) Potrzebna jest kadź w kształcie walca, otwarta od góry, której dno i bok wykonane są z tego samego materiału. Kadź ma mieć pojemność 257 hektolitrów. Jaki powinien być stosunek średnicy dna do wysokości kadzi, aby do jej wykonania zużyć jak najmniej materiału?

(6) Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji określonej podanym wzorem w podanym przedziale:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad f(x) = x^2 + 2x + 21, \quad [-2, 7], \\
& \text{(b)} \quad f(x) = |x^2 - 1| + 3x, \quad [-2, 2], \\
& \text{(c)} \quad f(x) = |x + 1| + x^2, \quad [-10, 10], \\
& \text{(d)} \quad f(x) = |10x - 1| + x^3, \quad [0, 1], \\
& \text{(e)} \quad f(x) \log x - \frac{x}{10}, \quad [1, e^3], \\
& \text{(f)} \quad f(x) = |\sin x| + \frac{x}{2}, \quad [0, 2\pi], \\
& \text{(g)} \quad f(x) = x^{1/x}, \quad [2, 4], \\
& \text{(h)} \quad f(x) = 3 \sin x + \sin 3x, \quad [0, 2\pi].
\end{aligned}$$

(7) Oblicz granice:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right), \quad \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x},$$

$$\begin{array}{ll}
\text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}, & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - x^2 + 2}{x \sin x - x^2}, \\
\text{(e)} \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}, & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}, \\
\text{(g)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{(h)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{e^x} - e}{x}, \\
\text{(i)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}, & \text{(j)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1}, \\
\text{(k)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x - x + 1}{(x - 1)^2}, & \text{(l)} \lim_{x \rightarrow e} \frac{\log \log x}{x - e}, \\
\text{(m)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^x}, & \text{(n)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^x - 4}{x - 2}.
\end{array}$$