

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 9

27.11.08

(1) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1} & : \quad x \neq 0, \\ A & : \quad x = 0. \end{cases}$$

Dla jakiego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?

(2) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-\pi^2}{\sin x} & : \quad x \notin \{k\pi; k \in \mathbf{Z}\}, \\ A_k & : \quad x = k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Dla jakich A_k ($k \in \mathbf{Z}$) istnieją $f'(k\pi)$ i ile wynoszą?

(3) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x-1}{\cos^2 x} & : \quad x \notin \{k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z}\}, \\ A_k & : \quad x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Dla jakich A_k ($k \in \mathbf{Z}$) istnieją $f'(k\pi + \frac{\pi}{2})$ i ile wynoszą?

(4) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{\sin(\pi x)} & : \quad x \notin \mathbf{Z}, \\ x^2 - 2x & : \quad x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Oblicz $f'(x)$ dla tych $x \in \mathbf{Z}$, dla których istnieje.

(5) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{7x}-1}{x} & : \quad x \neq 0, \\ 1 & : \quad x = 0. \end{cases}$$

Oblicz $f'(0)$.

(6) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi x)+1}{\sin(\pi x)} & : \quad x \notin \mathbf{Z}, \\ x^3 - x & : \quad x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Oblicz $f'(x)$ dla tych $x \in \mathbf{Z}$, dla których istnieje.

(7) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x}-3e^x+2}{x^2} & : \quad x \neq 0, \\ A & : \quad x = 0. \end{cases}$$

Dla jakiego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?

(8) Oblicz pochodną rzędu 3 funkcji $f(x)$ danej wzorem:

(a) $(x+1)^6$, (b) $x^6 - 4x^3 + 4$, (c) $\frac{1}{1-x}$,
(d) $x^3 \log x$, (e) e^{2x-1} ; (f) $(x^2+1)^3$,
(g) e^{x^2} , (h) $\log(x^2)$; (i) $(x-7)^{50}$.

(9) Wyprowadź wzór na pochodną rzędu n funkcji $f(x)$ danej wzorem:

(a) $\log(x^{10})$, (b) $x \log x$, (c) $\sqrt{x}$,
(d) $x^2 \sin x$, (e) $\frac{1-x}{1+x}$, (f) xe^x ,
(g) $\sin(5x)$, (h) x^7 , (i) e^{4x} ,
(j) $x + \frac{1}{x}$, (k) $x^2 e^{-x}$, (l) $\sin^2 x$.

(10) Udowodnij, że

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

(11) Oblicz przybliżone wartości następujących liczb korzystając trzech początkowych wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) odpowiednio dobranego szeregu Taylora. Oszacuj błąd przybliżenia na podstawie wzoru Taylora:

(a) $\sqrt{24}$, (b) $\sqrt[3]{126}$, (c) $\sqrt[7]{126}$,
(d) $\sin(1/10)$, (e) $\arctan(1/10)$, (f) $\sqrt{50}$.