

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 13

8.01.09

- (1) Oblicz pole figury ograniczonej krzywymi:
- (a) $y = x^2$ i $y = 2x + 5$, (b) $y = e^x$ i prostą przechodzącą przez punkty $(0, 1)$ i $(1, e)$,
- (c) $y = \sin x$ i $y = \frac{2x}{\pi}$, (d) $y = x^4$ i $y = x^3$,
- (e) $y = \frac{1}{x}$ i $y = \frac{5}{2} - x$, (f) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^3}$ i $x = 2$.
- (2) Oblicz długość łuku krzywej $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ dla podanych $f(x)$, a i b :
- (a) x , 1 , 2 , (b) $2x - 3$, -7 , 12 , (c) e^x , 1 , 2 ,
- (d) $\sqrt{x^3}$, 6 , 10 , (e) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 0 , 1 .
- (3) Dla danych $f(x)$, a i b oblicz pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ wokół osi OX :
- (a) x^3 , 0 , 5 , (b) e^{-x} , 0 , 10 , (c) $\sqrt{x}$, 0 , 4 ,
- (d) $\sin x$, 0 , π , (e) $\cos 7x$, 0 , 2π .
- (4) Dla danych $f(x)$, a i b oblicz objętość bryły powstałej przez obrót obszaru $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$ wokół osi OX :
- (a) $\sqrt{x}$, 0 , 1 , (b) x , 1 , 5 , (c) x^7 , 0 , 10 ,
- (d) e^x , -3 , 0 , (e) $\sin x$, 0 , $\frac{3\pi}{2}$.
- (5) Oblicz długość łuku krzywej $y = \sqrt{(x+5)^3}$, $0 \leq x \leq 8$.
- (6) Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót obszaru $0 \leq y \leq xe^x$, $0 \leq x \leq 1$ wokół osi OX .
- (7) Oblicz długość łuku krzywej $y = \log x$, $1 \leq x \leq \sqrt{3}$.
- (8) Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót obszaru $\arctan x \leq y \leq \sqrt{\arctan^2 x + 1} + \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ wokół osi OX .

- (9) Od pomarańczy o grubej skórce odcięto końce, tak, że ukazał się miąższ. Pomarańczę następnie pokrojono w równe plastry. Pokaż, że każdy plaster zawiera tyle samo skórki.

- (10) Zbadaj zbieżność całek niewłaściwych i oblicz te, które są zbieżne:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}, & \text{(b)} \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}, & \text{(c)} \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}, \\
 \text{(d)} \int_{-1}^1 \frac{x-1}{x^2-1} dx, & \text{(e)} \int_2^\infty \frac{dx}{x \log x}, & \text{(f)} \int_0^\infty \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}}, \\
 \text{(g)} \int_0^\infty \cos x dx, & \text{(h)} \int_1^\infty x^{\frac{1}{x}} dx, & \text{(i)} \int_{-\infty}^\infty e^x dx, \\
 \text{(j)} \int_0^1 e^{\frac{1}{x}} dx, & \text{(k)} \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} dx, & \text{(l)} \int_2^\infty \frac{dx}{x \log^2 x}, \\
 \text{(m)} \int_0^\infty x^3 \sin(x^4) dx.
 \end{array}$$