

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 14

15.01.09

(1) Zbadaj zbieżność podanych ciągów, oraz zbieżność jednostajną

na podanych zbiorach:

$$(a) f_n(x) = \sqrt{x^4 + \frac{x^2}{n}}, \quad (-\infty, \infty), \quad (b) f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}, \quad (-\infty, \infty),$$

$$(c) f_n(x) = x^n - x^{2n}, \quad [0, 1], \quad (d) f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right), \quad [0, \pi],$$

$$(e) f_n(x) = \sin^n(x), \quad (-\infty, \infty), \quad (f) f_n(x) = \frac{1}{1 + x + n}, \quad [0, \infty),$$

$$(g) f_n(x) = \frac{1}{1 + (x + n)^2}, \quad (-\infty, \infty), \quad (h) f_n(x) = \frac{1}{nx}, \quad (0, 1],$$

$$(i) f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx^2}, \quad [-1, 1], \quad (j) f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}, \quad [-1, 1],$$

$$(k) f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right), \quad [-1, 1]; \quad (l) f_n(x) = nx^{-nx^2}, \quad [-1, 1].$$

(2) Wyznacz zbiór, na którym zbieżny jest szereg, oraz sprawdzić,

czy zbieżność jest jednostajna:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-nx^2}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{1 + nx}}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{10^n},$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}, \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! x^n}, \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + x^2}},$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2}, \quad (h) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n, \quad (i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n},$$

$$(j) \sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{x(1-x)})^n, \quad (k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad (l) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^2}\right),$$

$$(m) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}, \quad (n) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx).$$

(3) Udowodnij, że następujące szeregi są jednostajnie zbieżne na

całej prostej $(-\infty, \infty)$:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{10^n}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + n^2}.$$

(4) Udowodnij, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{1+nx}}$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $[0, \infty)$.

(5) Udowodnij, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{n x^n}$ jest zbieżny punktowo, ale nie jednostajnie na zbiorze $[1, \infty)$, oraz że jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $[2, \infty)$.

(6) Znajdź pochodną $f'(x)$ oraz całkę $\int f(x) dx$ następujących funkcji:

$$(a) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n, \quad (b) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} x^n,$$

$$(c) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n, \quad (d) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

(7) „Zwiń” następujące szeregi potęgowe, to znaczy znajdź wzór na sumę, i określ dziedzinę tak powstałej funkcji:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} n x^{2n}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{2n}, \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n,$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^n, \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(n+2) x^n.$$