

ARYTMETYKA ELEMENTARNA

LISTA ZADAŃ 1

05.03.10

- (1) Jeżeli $a_1, a_2, a_3, \dots$ jest ciągiem liczb naturalnych, to istnieje takie n naturalne, że

$$\mathbf{NWD}(a_1, a_2, a_3, \dots) = \mathbf{NWD}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n).$$

- (2) Podaj przykład 3 liczb naturalnych a, b, c takich, że

$$abc \neq \mathbf{NWD}(a, b, c) \cdot \mathbf{NWW}(a, b, c).$$

- (3) Pokaż, że dla dowolnych liczb naturalnych a, b, c mamy

$$abc = \mathbf{NWW}(a, b, c) \cdot \mathbf{NWD}(ab, ac, bc).$$

- (4) Pokaż, że dla dowolnych liczb naturalnych a, b, c mamy

$$abc = \mathbf{NWD}(a, b, c) \cdot \mathbf{NWW}(ab, ac, bc).$$

- (5) Pokaż, że dla dowolnych liczb naturalnych a, b, c mamy

$$\mathbf{NWD}(a, b, c) \cdot \mathbf{NWW}(a, b, c) \mid abc.$$

- (6) Pokaż, że dla dowolnych liczb naturalnych a, b, c

$$abc = \mathbf{NWD}(a, b, c) \cdot \mathbf{NWW}(a, b, c)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathbf{NWD}(a, b) = \mathbf{NWD}(a, c) = \mathbf{NWD}(b, c) = 1.$$

- (7) Pokaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^2 - n$ jest parzysta, liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6, a liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.

Wskazówka: $n^5 - n = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + \text{coś}$.

- (8) Znajdź takie liczby naturalne m, n , że

$$m^3 n^4 = 2^{11} \cdot 3^9 \cdot 5^{13}.$$

- (9) Która liczba jest większa, $2^8 \cdot 18^{10}$ czy 6^{19} ?

- (10) Oblicz $\mathbf{NWD}(24!, 24^8)$.

- (11) Oblicz $\mathbf{NWD}(12^{12}, 18^{18})$.

- (12) Niech $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^9$, $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 5^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 7^2$. Oblicz $\mathbf{NWD}(a, b, c)$ oraz $\mathbf{NWW}(a, b, c)$.

- (13) Niech $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 6^9$, $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 4^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 10^2$. Oblicz $\mathbf{NWD}(a, b, c)$ oraz $\mathbf{NWW}(a, b, c)$.

- (14) Wyznacz wszystkie liczby naturalne $n > 1$, dla których liczba $n^2 - 1$ jest pierwsza.

- (15) Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $3p + 1$ jest pierwsza.

- (16) Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $p^2 + 2$ jest pierwsza.