

ARYTMETYKA ELEMENTARNA

LISTA ZADAŃ 2

14.03.10

- (1) Znajdź wszystkie liczby naturalne n , dla których liczba $n^2 + 1$ jest podzielna przez $n + 1$.
- (2) Znajdź wszystkie liczby całkowite $x \neq 3$, takie, że $x - 3 \mid x^3 - 3$.
- (3) Udowodnij, że jeżeli $7 \mid a^2 + b^2$, to $7 \mid a$ i $7 \mid b$.
Wskazówka: Gdyby 7 nie dzieliło a , to jakie mogą być reszty z dzielenia a^2 przez 7?
- (4) Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n dla których liczba $4n^2 + 1$ jest podzielna przez 5 i przez 13.
- (5) Udowodnij, że dla n naturalnych zachodzi

$$169 \mid 3^{3n+3} - 26n - 27.$$

- (6) Udowodnij, że $19 \mid 2^{6^k+2} + 3$ dla $k = 0, 1, 2, \dots$
- (7) Udowodnij, że $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$.
- (8) udowodnij, że $F_n \mid 2^{F_n} - 2$, gdzie $F_n = 2^{2^n} + 1$ jest liczbą Fermata, $n = 1, 2, 3, \dots$
- (9) Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n dla których $n \mid 2^n + 1$.
Uwaga: W powyższych zadaniach często przydaje się następująca obserwacja: ze wzoru dwumianowego Newtona wynika, że

$$k \mid (k \cdot a + b)^n \Leftrightarrow k \mid b.$$

- (10) Która z liczb jest większa
 - $10!$ czy 10^{10} ?
 - $20!$ czy 10^{10} ?
 - $20!$ czy $(10!)^2$?
 - $100!$ czy $(10!)^{10}$?
 - $10!$ czy $6! \cdot 7!$?
- (11) Niech n będzie liczbą naturalną. Jaką resztę daje
 - liczba $6n + 11$ przy dzieleniu przez 3?
 - liczba $10n - 3$ przy dzieleniu przez 10?
 - liczba $10n - 23$ przy dzieleniu przez 10?
 - liczba $10n - 23$ przy dzieleniu przez 10, jeżeli $n = 1$?
- (12) Dowieść, że w ciągu 3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, ..., w którym każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie sumy cyfr, nie występuje liczba 2008.
- (13) Jakie reszty może dawać kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 3? Przez 4? Przez 8? Przez 5?
- (14) Jakie reszty może dawać sześcián liczby całkowitej przy dzieleniu przez 7? Przez 9?
- (15) Dowieść, że liczba naturalna o sumie cyfr równej 47 nie może być ani kwadratem, ani sześciánem liczby całkowitej.
- (16) Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d , dla których prawdziwa jest następująca cecha podzielności przez d : Dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k jest podzielna przez d wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby k jest podzielna przez d .