

ARYTMETYKA ELEMENTARNA

LISTA ZADAŃ 3

6.04.10

- (1) Znajdź wszystkie liczby naturalne n , dla których $\theta(n) = 4$ (liczba naturalnych dzielników jest równa 4).
- (2) Znajdź wszystkie liczby naturalne n , dla których $\theta(n) = 5$.
- (3) Znajdź wszystkie liczby naturalne n , dla których $\theta(n) = 6$.
- (4) Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $k > 1$ istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n , dla których $\theta(n) = k$.
- (5) Znajdź najmniejszą liczbę naturalną mającą dokładnie 10 dzielników pierwszych.
- (6) Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, żeby dla danych liczb całkowitych a, b , $b \neq 0$ równanie $\mathbf{NWD}(x, a) = b$ miało rozwiązanie, i znajdź wszystkie rozwiązania (kiedy istnieją).
- (7) Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, żeby dla danych liczb całkowitych a, b , $b \neq 0$ równanie $\mathbf{NWW}(x, a) = b$ miało rozwiązanie.
- (8) Znajdź wszystkie rozwiązania w liczba całkowitych x, y, z równania
$$6 \cdot x + 10 \cdot y + 15 \cdot z = 1.$$
- (9) Znajdź wszystkie rozwiązania w liczba całkowitych x, y, z, t równania
$$2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot z + 5 \cdot t = 6.$$
- (10) Znajdź wszystkie rozwiązania w liczba całkowitych x, y, z, t równania
$$30 \cdot x + 42 \cdot y + 70 \cdot z + 245 \cdot t = 1.$$
- (11) Czy istnieją liczby naturalne m, n spełniające równanie
$$6^m = 12^n ?$$
- (12) Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie
$$6^m \cdot 12^n = 18^k ?$$
- (13) Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie
$$18^m \cdot 24^n = 12^k ?$$
- (14) Wyznacz wszystkie liczby naturalne d o następującej własności: Dla dowolnych liczb naturalnych m, n , jeżeli iloczyn $m \cdot n$ jest podzielny przez 7, to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d .
- (15) To samo z liczbą 24 zamiast 7.
- (16) Udowodnij, że jeżeli k jest liczbą nieparzystą, a n dowolną naturalną, to
$$2^{n+2} \mid k^{2^n} - 1.$$
- (17) Udowodnij, że $11 \cdot 31 \cdot 61 \mid 20^{15} - 1$.
- (18) Udowodnij, że dla naturalnych m oraz $a > 1$ mamy

$$\mathbf{NWD}\left(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1\right) = \mathbf{NWD}(a - 1, m).$$