

ARYTMETYKA ELEMENTARNA

LISTA ZADAŃ 4

13.04.10

- (1) Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele rozwiązań (w liczbach naturalnych) równania $x^2 + y^2 = z^2$ takich, że $z = y + 1$.
- (2) Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele rozwiązań (w liczbach naturalnych) równania $x^2 + y^2 + 1 = z^2$.
- (3) Znajdź wszystkie trójkąty prostokątne o bokach naturalnych, których pole równe jest obwodowi.
- (4) Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele rozwiązań właściwych równania $x^2 + y^2 = z^2$ gdzie z jest kwadratem liczby naturalnej.
- (5) Udowodnij, że jeśli n jest liczbą naturalną większą od 2 to $\varphi(n)$ jest liczbą parzystą.
- (6) Znaleźć wszystkie liczby naturalne n , dla których $\varphi(n) = 2$.
- (7) Udowodnij, że do każdej ze stron kongruencji można dodać wielokrotność jej modułu.
- (8) Udowodnij, że obie strony kongruencji można podzielić przez każdy ich wspólny dzielnik, który jest pierwszym względem modułu.
- (9) Udowodnij, że jeżeli kongruencja $a \equiv b$ zachodzi jednocześnie modulo $m_1, m_2, \dots, m_n$, to także zachodzi modulo najmniejszej wspólnej wielokrotności tych modułów.
- (10) Udowodnij, że jeżeli $a \equiv b \pmod{m}$, $d \mid a$ i $d \mid m$ to $d \mid b$.
- (11) Udowodnij, że jeżeli $a \equiv b \pmod{m}$ to $\text{NWD}(a, m) = \text{NWD}(b, m)$.
- (12) Udowodnij, że jeżeli liczby c, d są względnie pierwsze względem m $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$, $c \mid a$, $d \mid b$ to $a/c \equiv b/d \pmod{m}$.
- (13) Udowodnij, że ostatnie cyfry liczb 2^n , $n = 1, 2, \dots$ tworzą ciąg okresowy o okresie 4 wyrazowym.
- (14) Oblicz ostatnią cyfrę liczby 2^{1000} .
- (15) Wyznacz ostatnią cyfrę liczby Fermata $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$.
- (16) Wyznacz dwie ostatnie cyfry liczby Fermata $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$.
- (17) Zbadaj ciąg ostatnich cyfr liczb postaci 3^n , $n = 1, 2, \dots$.
- (18) Udowodnij, że ostatnie cyfry liczb postaci n^n , $n = 1, 2, \dots$ tworzą ciąg okresowy o okresie długości 20 wyrazów.
- (19) Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczby n^5 i n mają te same ostatnie cyfry.
- (20) Opierając się na kongruencjach $1000 \equiv 1 \pmod{27}$ i $1000 \equiv 1 \pmod{37}$ sformułuj cechy podzielności przez 27 i 37.
- (21) Sformułuj cechę podzielności przez 101.