ARYTMETYKA ELEMENTARNA
LISTA ZADAŃ 5
25.04.10

(1) Które z wielomianów $x^{30}-1$, $x^{30}+1$, $x^{60}-1$, $x^{60}+1$ są podzielne przez wielomian
- x^5+1,
- x^5-1,
- x^6+1,
- x^6-1?

(2) Podaj wszystkie liczby naturalne n takie, że wielomian
- wielomian $x^{60}-1$ jest podzielny przez x^n-1,
- wielomian $x^{60}-1$ jest podzielny przez x^n+1,
- wielomian $x^{60}+1$ jest podzielny przez x^n-1,
- wielomian $x^{60}+1$ jest podzielny przez x^n+1,

(3) Dobierz liczby a i b tak, aby wielomian x^4+a był podzielny przez x^2+2x+b.

(4) Dobierz odpowiednio znaki tak, aby wielomian $x^4 \pm x^2+1$ był podzielny przez $x^2 \pm x+1$.

(5) Czy istnieje wielomian P stopnia 4 taki, że

$$P(0)=P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=1, \quad P(5)=5.$$

(6) Udowodnij, że dla wielomianów $P^2=Q^2$ oznacza $P=\pm q$. Czy jest to również prawdą dla innych funkcji?

(7) Wyznacz największy wspólny dzielnik pary wielomianów:
- x^4-4x^3+1, x^3-3x^2+1,
- x^3+px+q, $3x^2+p$,
- $x^4-3x^3-5x^2+9x-2$, $x^4+x^3-x^2+5x+6$.

(8) Wiemy, że dla wielomianów P i Q można dobrać tak wielomiany S i T, że

$$S \cdot P + T \cdot Q = \mathbf{NWD}(P,Q).$$

Dobierz wielomiany S i T dla pary
- x^2+x+1, x^3-1,
- x^4+x-1, x^3-2x+2.

(9) Udowodnij, że

$$\mathbf{NWD}(P, \mathbf{NWD}(Q,R)) = \mathbf{NWD}(\mathbf{NWD}(P,Q),R).$$

(10) Niech $a \geq 0$. Rozłóż wielomian rzeczywisty x^4+a^2 na czynniki pierwsze.

(11) Niech m,n,p będą liczbami naturalnymi, i niech

$$P(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}.$$

- Udowodnij, że wielomian x^2+x+1 dzieli P,
- Udowodnij, że wielomian x^4+x^2+1 dzieli $P \Leftrightarrow$ liczby m,n,p są albo wszystkie parzyste albo wszystkie nieparzyste.

(12) Rozwiąż równania
- $x^3+9x+2=0$,
- $x^3-13x+12=0$,
- $x^3-3x62-9x+17=0$.