ARYTMETYKA ELEMENTARNA
LISTA ZADAŃ 6
27.05.10

(1) Udowodnij, że jeżeli wielomian (rzeczywisty lub zespolony)
$$\varphi(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
jest nierozkładalny to następujące wielomiany też są nierozkładalne:
(a) $a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_0$,
(b) $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$,
(c) $\varphi(a) + \frac{\varphi'(a)}{1!}\,x + \frac{\varphi''(a)}{2!}\,x^2 + \frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}\,x^n$ dla dowolnego a (w $\mathbf{R}$ lub $\mathbf{C}$),
(d) $a_n x^n + a_{n-1}bx^{n-1} + a_{n-2}b^2x^{n-2} + \cdots + a_1 b^{n-1}x + a_0 b^n$ dla dowolnego $b \neq 0$ (w $\mathbf{R}$ lub $\mathbf{C}$).
Znając rozkład na czynniki pierwsze wielomianu φ znajdź rozkład na czynniki pierwsze każdego z powyższych wielomianów.

(2) Pokaż, że jeżeli x_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu P, to x_0 jest $(k-1)$-krotnym pierwiastkiem wielomianu P'.

(3) Pokaż, że jeżeli x_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu P, to
$$P(x_0) = P'(x_0) = \cdots = P^{(k-1)}(x_0) = 0, \qquad P^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

(4) Pokaż, że jeżeli $\mathbf{NWD}(P, P') = 1$ to wielomian P ma tylko pierwiastki pojedyncze.

(5) Niech $k_{x_0}(P)$ oznacza krotność pierwiastka x_0 wielomianu P różnego od zera. Przyjmujemy, że jeżeli x_0 nie jest pierwiastkiem P to $k_{x_0}(P) = 0$. Udowodnij, że
(a) $k_{x_0}(PQ) = k_{x_0}(P) + k_{x_0}(Q)$,
(b) $k_{x_0}(P/Q) = k_{x_0}(P) - k_{x_0}(Q)$ (jeżeli $Q \,\big|\, P$).

(6) Niech P będzie dowolnym wielomianem, a x_0 dowolną liczbą. Wtedy x_0 jest pierwiastkiem wielomianu
$$\frac{1}{2}(x - x_0)\big(P'(x) + P'(x_0)\big) - P(x) + P(x_0).$$
Zbadaj krotność tego pierwiastka.

(7) Udowodnij, że wielomiany
$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots$$
nie mają pierwiastków wielokrotnych.

(8) Znajdź warunki konieczne i dostateczne na to, żeby wielomiany $x^2 + px + q$ oraz $x^3 = px + q$ miały pierwiastki wielokrotne.

(9) Które z wielomianów
(a) $x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 5x + 1$,
(b) $x^5 - 7x^4 + 10x^3 + 18x^2 + 27x - 27$,
(c) $x^5 + 3x^4 - x^3 + 12x^2 + x - 1$
mają pierwiastki wielokrotne?

(10) Udowodnij, że jeżeli $x_0 \neq 0$ i $(x - x_0)^k$ dzieli wielomian $P(x^n)$, to $(x^n - x_0^n)^k$ też dzieli ten wielomian.
Wsk.: Udowodnij najpierw przypadek $x_0 = 0$, $k = 1$.