

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 3

15.10.09

- (1) Wyznacz dziedziny naturalne następujących funkcji:
- (a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$, (b) $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$,
 (c) $f(x) = \sqrt{3x - x^3}$, (d) $f(x) = \log(x^2 - 4)$,
 (e) $f(x) = \log(1 - 2 \cos x)$, (f) $f(x) = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$.
- (2) Zapisz wzorem $y = f(x)$ złożenie następujących funkcji, i wyznacz dziedzinę naturalną złożenia:
- (a) $t = 2^x$, $z = \sqrt[3]{t+1}$, $y = z^2$, (b) $t = \sin x$, $z = \log t$, $y = \sqrt{1 + z^2}$.
- (3) Naszkicuj wykres funkcji:
- (a) $y = |x+1| + |x-1|$, (b) $y = |x-3| - 2|x+1| + 2|x| - x + 1$,
 (c) $y = x^3 + 3x^2$, (d) $y = -x^3 + 2x - 2$,
 (e) $y = 1 - \sin x$, (f) $y = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,
 (g) $y = |\sin x|$, (h) $y = \frac{1}{\cos x}$.
- (4) Znajdź funkcje odwrotne do:
- (a) $y = 1 - 3x$, (b) $y = \frac{1}{1-x}$, $x \neq 1$,
 (c) $y = x^2 - 2x$, $x \geq 1$, (d) $y = \sqrt[3]{x^2+1}$, $x \geq 0$,
- (5) Znajdź 10 kolejnych wyrazów oraz granicę ciągu $\{a_n\}$ określonego wzorem: $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$.
- (6) Jakie wartości przyjmuje ciąg dany wzorem: $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$?
 A ciąg dany wzorem: $a_n = \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}$?
- (7) Ciąg Fibonacciego określony jest rekurencyjnie w sposób następujący: $F_1 = F_2 = 1$, a następnie $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Znajdź wyrazy ciągu Fibonacciego o numerach od 3 do 12. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość: $F_{n+2} \cdot F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.
- (8) Udowodnij, korzystając z definicji, zbieżność ciągów, znajdując ich granice:
- (a) $a_n = \frac{1}{n^2}$, (b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$,
 (c) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, (d) $a_n = \frac{n+2}{n-1}$,
 (e) $a_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}}$, (f) $a_n = \frac{3n^3 - 2n^2 - 7n + 5}{4n^3 + n - 6}$,
 (g) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
- (9) Udowodnij, że jeśli x jest liczbą rzeczywistą o rozwinięciu dziesiętnym

$$\beta, \alpha_1 \alpha_2 \dots,$$

to ciąg określony wzorem

$$a_n = \beta, \alpha_1 \cdots \alpha_n$$

jest zbieżny do x (, jest punktem dziesiętnym, a $\beta \in \mathbf{Z}$).

- (10) Udowodnij z definicji, że ciąg stały $a_n = a$ jest zbieżny do granicy a .
 (11) Udowodnij, że granica sumy (różnicy, ilorazu) ciągów zbieżnych jest sumą (różnicą, ilorazem) ich granic. Oczywiście w przypadku ilorazu zakładamy, że ciąg w mianowniku ma wyrazy różne od zera, i że jego granica jest różna od zera.
 (12) Zbadaj monotoniczność następujących ciągów:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & a_n = n + \frac{1}{n}, \\ \text{(b)} & a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2, \\ \text{(c)} & a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{2^n}, \\ \text{(d)} & a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n} \\ \text{(e)} & a_n = \frac{2^n}{n!}, \\ \text{(f)} & a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n}. \end{array}$$

- (13) Oblicz granice (być może niewłaściwe) ciągów:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & a_n = \frac{7n + (\sqrt[3]{n}\sqrt[6]{n})^5 \sqrt{9n+1}}{11n^3 + 7n + 3}, \\ \text{(b)} & a_n = \sqrt{n^2 + n} - n, \\ \text{(c)} & a_n = \frac{\sin n}{n}, \\ \text{(d)} & a_n = r^n, \quad r > 0, \\ \text{(e)} & a_n = \sqrt[n]{r}, \quad 0 < r < 1, \\ \text{(f)} & a_n = 2^n - \frac{1}{n}, \\ \text{(g)} & a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n + 2}, \\ \text{(h)} & a_n = \frac{1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n}{1 + 3 + 9 + \cdots + 3^n}, \\ \text{(i)} & a_n = \frac{1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots - 2n}{\sqrt{n^2 + 2}}, \\ \text{(j)} & a_n = \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}, \\ \text{(k)} & a_n = \frac{1 + 3 + 9 + \cdots + 3^n}{3^n}, \\ \text{(l)} & a_n = \sqrt{3^n + 2^n} \sqrt{3^n + 1}, \\ \text{(m)} & a_n = \sqrt[n^2]{n}, \\ \text{(n)} & a_n = \sqrt[n]{n^2}, \\ \text{(o)} & a_n = n(\sqrt{n^2 + 7} - n), \\ \text{(p)} & a_n = \frac{n^2 + n + 1}{(n + \sin n)^2}, \\ \text{(q)} & a_n = \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1} + \frac{n^2 + 2}{n^3 + 2} + \frac{n^2 + 3}{n^3 + 3} + \cdots + \frac{n^2 + n}{n^3 + n}, \\ \text{(r)} & a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{1}{(n + 1)^2}, \\ \text{(s)} & a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+7} - \sqrt{n}}. \end{array}$$

- (14) Wypisz wzorem ciąg, dla którego $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, i każdy z wyrazów jest średnią harmoniczną dwóch wyrazów sąsiednich:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}} \right), \quad n \geq 2.$$

- (15) Wypisz wzorem ciąg, dla którego $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, i każdy z wyrazów jest średnią geometryczną dwóch wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}, \quad n \geq 2.$$