

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 7

23.11.09

- (1) Naszkicuj wykres funkcji $f(x)$ danej wzorem ($[\dots]$ oznacza część całkowitą, a $\{\dots\}$ oznacza część ułamkową):

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|, \\ \text{(c)} & f(x) = x^2 + x + 2 - |x^2 - x - 2|, \\ \text{(e)} & f(x) = \left[\frac{4}{\pi} \arctan x\right], \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(b)} & f(x) = |x^2 - 8x + 15|, \\ \text{(d)} & f(x) = \{\cos x\}, \\ \text{(f)} & f(x) = 2\{\sin x\} - \{2 \sin x\}. \end{array}$$

- (2) Rozwiąż następujące równania i nierówności:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \sin x \geq \frac{1}{2}, \\ \text{(c)} & [\sin x] = 0, \\ \text{(e)} & \left\{\frac{4}{\pi} \arctan x\right\} = 0, \\ \text{(g)} & (x^2 - 4) \cdot \cos x \geq 0, \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(b)} & |\cos x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \text{(d)} & \{\cos x\} = \frac{1}{2}, \\ \text{(f)} & \left\{\frac{3}{\pi} \arctan x\right\} \leq \frac{1}{2}, \\ \text{(h)} & \left(\frac{3}{2} + \sin x\right)^{\sin x} = 1. \end{array}$$

- (3) Oblicz granice:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}, & \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, & \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log x}{1 + \log x}, \\ \text{(d)} & \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2^{1/x} + 1}{2^{-1/x} - 1}, & \text{(e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2^{1/x} + 1}{2^{-1/x} - 1}, & \text{(f)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{1/x} - 1}{2^{-1/x} + 1}. \end{array}$$

- (4) Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x)$, oraz sprawdź, w których punktach funkcja jest ciągła a w których nieciągła ($\operatorname{sgn} x$ to znak x : dla $x > 0$ $\operatorname{sgn} x = 1$, dla $x < 0$ $\operatorname{sgn} x = -1$, a dla $x = 0$ $\operatorname{sgn} x = 0$):

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x), & \text{(b)} & f(x) = \{x\} - (\{x\})^2, \\ \text{(c)} & f(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ x & : 0 \leq x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & : 1 \leq x < 3 \\ 4 - x & : x \geq 3, \end{cases} & \text{(d)} & f(x) = \begin{cases} x & : x \neq 2 \\ \operatorname{sgn} x & : x = 2, \end{cases} \\ \text{(e)} & f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}, & \text{(f)} & f(x) = \operatorname{sgn}(x^3 - x), \\ \text{(g)} & f(x) = [x] - [\sqrt[3]{x}], & \text{(h)} & f(x) = x^3 \operatorname{sgn}(x), \\ \text{(i)} & f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 4} + 1}, & \text{(j)} & f(x) = [x^2], \\ \text{(k)} & f(x) = \{\log_2 x\}, & \text{(l)} & f(x) = \frac{1}{\{x\}}, \\ \text{(m)} & f(x) = \left| \left[x + \frac{1}{2} \right] - x \right|. \end{array}$$

- (5) Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja $f(x)$ jest ciągła? Naszkicuj wykres $f(x)$ dla takich a i b .

$$\text{(a)} \quad f(x) = \begin{cases} ax + b & : x < 1 \\ x^2 & : 1 \leq x < 2 \\ ax - b & : 2 \leq x. \end{cases} \quad \text{(b)} \quad f(x) = \begin{cases} x & : x < 1 \\ x^2 + ax + b & : 1 \leq x < 2 \\ x + 3 & : 2 \leq x. \end{cases}$$