

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 9

7.12.09

(1) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos(x) - 1} & : x \neq 0, \\ A & : x = 0. \end{cases}$$

Dla jakiego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?

(2) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \pi^2}{\sin(x)} & : x \notin \{k\pi; k \in \mathbf{Z}\}, \\ A_k & : x = k\pi, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Dla jakich A_k ($k \in \mathbf{Z}$) istnieją $f'(k\pi)$ i ile wynoszą?

(3) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x) - 1}{\cos^2(x)} & : x \notin \{k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z}\}, \\ A_k & : x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Dla jakich A_k ($k \in \mathbf{Z}$) istnieją $f'(k\pi + \frac{\pi}{2})$ i ile wynoszą?

(4) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{\sin(\pi x)} & : x \notin \mathbf{Z}, \\ \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x} & : x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Oblicz $f'(x)$ dla tych $x \in \mathbf{Z}$, dla których istnieje.

(5) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{7x} - 1}{x} & : x \neq 0, \\ 1 & : x = 0. \end{cases}$$

Oblicz $f'(0)$.

(6) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi x) + 1}{\sin(\pi x)} & : x \notin \mathbf{Z}, \\ \frac{x^3 - x}{x^3 - x} & : x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Oblicz $f'(x)$ dla tych $x \in \mathbf{Z}$, dla których istnieje.

(7) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - 3e^x + 2}{x^2} & : x \neq 0, \\ A & : x = 0. \end{cases}$$

Dla jakiego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?

(8) Oblicz pochodną rzędu 3 funkcji $f(x)$ danej wzorem:

- (a) $(x+1)^6$, (b) $x^6 - 4x^3 + 4$, (c) $\frac{1}{1-x}$,
(d) $x^3 \log x$, (e) e^{2x-1} ; (f) $(x^2+1)^3$,
(g) e^{x^2} , (h) $\log(x^2)$, (i) $(x-7)^{50}$.

(9) Wyprowadź wzór na pochodną rzędu n funkcji $f(x)$ danej wzorem:

- (a) $\log(x^{10})$, (b) $x \log(x)$, (c) $\sqrt{x}$,
(d) $\sin^2(x)$, (e) $\frac{1-x}{1+x}$, (f) xe^x ,
(g) $\sin(5x)$, (h) x^7 , (i) e^{4x} ,
(j) $x + \frac{1}{x}$, (k) $x^2 e^{-x}$.

(10) Udowodnij, że

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

(11) Oblicz przybliżone wartości następujących liczb korzystając trzech początkowych wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) odpowiednio dobranego szeregu Taylora. Oszacuj błąd przybliżenia na podstawie wzoru Taylora:

- (a) $\sqrt{24}$, (b) $\sqrt[3]{126}$, (c) $\sqrt[7]{126}$,
(d) $\sin(\frac{1}{10})$, (e) $\arctan(\frac{1}{10})$, (f) $\sqrt{50}$.