

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 8

21.11.11

- (1) Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Korzystając z definicji oblicz $f'(8)$.
- (2) Niech $f(x) = x^5$. Korzystając z definicji wyprowadź wzór na $f'(x)$.
- (3) Niech $n \in \mathbf{N}$. Dobierz stałe a, b, c tak, aby funkcja

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & : |x| \geq 1/n, \\ ax^2 + bx + c & : |x| < 1/n \end{cases}$$

była różniczkowalna. Oblicz pochodną $f'_n(x)$, naszkicuj wykres funkcji $f_n(x)$ oraz wykres pochodnej.

- (4) Oblicz pochodną następujących funkcji. Podaj w jakim zbiorze istnieje pochodna:

- | | |
|---|---|
| <p>(a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$,</p> <p>(c) $f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}$,</p> <p>(e) $f(x) = (x^2 + 1)^4$,</p> <p>(g) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$,</p> <p>(i) $f(x) = \left(\frac{1}{1 + x^2} \right)^{1/3}$,</p> <p>(k) $f(x) = 2^{x+3}$,</p> <p>(m) $f(x) = \frac{x}{e^x}$,</p> <p>(o) $f(x) = e^x \log x$,</p> <p>(q) $f(x) = e^{x^2}$,</p> <p>(s) $f(x) = e^{e^x}$,</p> <p>(u) $f(x) = \log_{10}(x - 1)$,</p> <p>(w) $f(x) = 2^{3^x}$,</p> <p>(y) $f(x) = e^{\sqrt{\log x}}$,</p> <p>(aa) $f(x) = x^{x^x}$,</p> <p>(ac) $f(x) = (\log x)^x$,</p> <p>(ae) $f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{10}$,</p> <p>(ag) $f(x) = e^{2x+3} \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right)$,</p> <p>(ai) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}}$,</p> <p>(ak) $f(x) = \operatorname{sgn} x$,</p> <p>(am) $f(x) = e^{- x }$,</p> | <p>(b) $f(x) = (\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right)$,</p> <p>(d) $f(x) = (1 + \sqrt{x})(1 + x^{1/3})(1 + x^{1/4})$,</p> <p>(f) $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$,</p> <p>(h) $f(x) = (1 + 2x)^{30}$,</p> <p>(j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^4 - x^8}}$,</p> <p>(l) $f(x) = x10^x$,</p> <p>(n) $f(x) = x^2(x + 1)e^x$,</p> <p>(p) $f(x) = \frac{\log x}{e^x}$,</p> <p>(r) $f(x) = x^{10} \log x$,</p> <p>(t) $f(x) = \log \log x$,</p> <p>(v) $f(x) = 10^{2x-3}$,</p> <p>(x) $f(x) = \log_2 \log_3(\log_5 x)$,</p> <p>(z) $f(x) = x^{x^2}$,</p> <p>(ab) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$,</p> <p>(ad) $f(x) = e^{-x^2} \log x$,</p> <p>(af) $f(x) = x^5(x^6 - 8)^{1/3}$,</p> <p>(ah) $f(x) = \log \frac{1}{1 + x}$,</p> <p>(aj) $f(x) = x ^3$,</p> <p>(al) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ x^2 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$,</p> <p>(an) $f(x) = \sqrt{\sqrt{1 + x^2} - 1}$,</p> |
|---|---|

- (ao) $f(x) = \{x\}$, (ap) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < 0, \\ x^2 & \text{dla } x \geq 0, \end{cases}$
- (aq) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^5 - x^3)$, (ar) $f(x) = \frac{\pi^{10}}{\pi - e}$,
- (as) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla } x < 0, \\ 1 + x & \text{dla } x \geq 0, \end{cases}$ (at) $f(x) = x^7 + e^2$,
- (au) $f(x) = (x + e)^{20}$, (av) $f(x) = e^e$.
- (5) Potrzebna jest kadź w kształcie walca, otwarta od góry, której dno i bok wykonane są z tego samego materiału. Kadź ma mieć pojemność 257 hektolitrów. Jaki powinien być stosunek średnicy dna do wysokości kadzi, aby do jej wykonania zużyć jak najmniej materiału?
- (6) Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji określonej podanym wzorem w podanym przedziale:
- (a) $f(x) = x^2 + 2x + 21$, $[-2, 7]$, (b) $f(x) = |x^2 - 1| + 3x$, $[-2, 2]$,
(c) $f(x) = |x + 1| + x^2$, $[-10, 10]$, (d) $f(x) = |10x - 1| + x^3$, $[0, 1]$,
(e) $f(x) = \log(x) - \frac{x}{10}$, $[1, e^3]$, (f) $f(x) = |\sin(x)| + \frac{x}{2}$, $[0, 2\pi]$,
(g) $f(x) = x^{1/x}$, $[2, 4]$, (h) $f(x) = 3\sin(x) + \sin(3x)$, $[0, 2\pi]$.
- (7) Oblicz granice:
- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right)$, (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$,
(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}$, (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos(x) + x^2 - 2}{x\sin(x) - x^2}$,
(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x}$, (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x}$,
(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$, (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{e^x} - e}{x}$,
(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$, (j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{x - 1}$,
(k) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x) - x + 1}{(x - 1)^2}$, (l) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\log \log(x)}{x - e}$,
(m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^x}$, (n) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^x - 4}{x - 2}$.