

ANALIZA MATEMATYCZNA
LISTA ZADAŃ 9
28.11.11

(1) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos(x) - 1} & : \quad x \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, \\ A & : \quad x = 0. \end{cases}$$

Dla jakiego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?

(2) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x) - 1}{\cos^2(x)} & : \quad x \notin \{k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z}\}, \\ A_k & : \quad x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Dla jakich A_k ($k \in \mathbf{Z}$) istnieją $f'(k\pi + \frac{\pi}{2})$ i ile wynoszą?

(3) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{\sin(\pi x)} & : \quad x \notin \mathbf{Z}, \\ x^2 - 2x & : \quad x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Oblicz $f'(x)$ dla tych $x \in \mathbf{Z}$, dla których istnieje.

(4) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{7x} - 1}{x} & : \quad x \neq 0, \\ 7 & : \quad x = 0. \end{cases}$$

Oblicz $f'(0)$.

(5) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi x) + 1}{\sin(\pi x)} & : \quad x \notin \mathbf{Z}, \\ x^3 - x & : \quad x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Oblicz $f'(x)$ dla tych $x \in \mathbf{Z}$, dla których istnieje.

(6) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - 3e^x + 2}{x^2} & : \quad x \neq 0, \\ A & : \quad x = 0. \end{cases}$$

Dla jakiego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?

(7) Oblicz pochodną rzędu 3 funkcji f danej wzorem:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & (x+1)^6, & \text{(b)} \quad x^6 - 4x^3 + 4, \quad \text{(c)} \quad \frac{1}{1-x}, \\ \text{(d)} & x^3 \log x, & \text{(e)} \quad e^{2x-1}, \quad \text{(f)} \quad (x^2+1)^3, \\ \text{(g)} & e^{x^2}, & \text{(h)} \quad \log(x^2), \quad \text{(i)} \quad (x-7)^{50}. \end{array}$$

(8) Wyprowadź wzór na pochodną rzędu n funkcji f danej wzorem:

- (a) $\log(x^{10})$, (b) $x \log(x)$, (c) $\sqrt{x}$,
(d) $\sin^2(x)$, (e) $\frac{1-x}{1+x}$, (f) xe^x ,
(g) $\sin(5x)$, (h) x^7 , (i) e^{4x} ,
(j) $x + \frac{1}{x}$, (k) $x^2 e^{-x}$.

(9) Udowodnij, że

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

(10) Oblicz przybliżone wartości następujących liczb korzystając trzech początkowych wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) odpowiednio dobranego szeregu Taylora. Oszacuj błąd przybliżenia na podstawie wzoru Taylora:

- (a) $\sqrt{24}$, (b) $\sqrt[3]{126}$, (c) $\sqrt[7]{126}$,
(d) $\sin(\frac{1}{10})$, (e) $\arctan(\frac{1}{10})$, (f) $\sqrt{50}$.