

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 1

1.10.2012

- (1) Przedstaw liczbę $0,1(270)$ w postaci ułamka zwykłego.
(2) Pokaż, że rozwinięcie

$$x = 0,1234567891011121314151617181920212223 \dots$$

złożone z kolejnych liczb naturalnych, nie jest okresowe.

Wskazówka: Uzasadnij, że w powyższym rozwinięciu są miejsca, w których występują po kolei dwa zera, trzy zera, cztery zera, itd., czyli że istnieją dowolnie długie „odcinki” złożone z samych zer.

- (3) Podaj trzy pierwsze cyfry po przecinku liczby $\sqrt[3]{7}$.
(4) Pokaż, że liczby $\sqrt{24}$ i $\sqrt[5]{10}$ są niewymierne.
(5) Udowodnij że zbiór liczb całkowitych nie jest ograniczony ani od góry ani od dołu.
Wskazówka: Wykorzystaj aksjomat Archimidesa.
(6) Podaj przykład liczby x takiej że:
(a) $0 < x < 1$ i x jest niewymierna,
(b) $\sqrt{5} < x < \sqrt{6}$ i x jest wymierna,
(c) x^2 i x^3 są niewymierne, ale x^5 jest wymierna,
(d) x^4 i x^6 są wymierne, ale x^5 jest niewymierna,
(e) $(x+1)^2$ jest niewymierna,
(f) x jest niewymierna, ale $x + \frac{1}{x}$ jest wymierna.
(7) Korzystając z definicji znajdź kresy górny i dolny odcinka otwartego $(1, 2)$.
(8) Znajdź kresy górny i dolny zbioru

$$\left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{k}; n, k \in \mathbf{N} \right\}.$$

- (9) Znajdź kresy górny i dolny zbioru

$$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$$

złożonego z odwrotności kolejnych liczb naturalnych.

- (10) Znajdź kresy górny i dolny zbioru

$$A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 < 2\}$$

- (11) Udowodnij, że liczba $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ jest niewymierna.
(12) Udowodnij, że liczba $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{6}$ jest niewymierna.
(13) Udowodnij, że każdym przedziale otwartym (a, b) istnieje liczba niewymierna.
(14) Udowodnij, że dowolne liczby rzeczywiste x, y spełniają nierówność

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

- (15) Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ prawdziwa jest nierówność

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

(16) Znajdź kresy górny i dolny zbioru

$$\{x + y : x, y > 0, [x] + [y] = 3\}.$$

(17) Wykaż, że

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}, \quad \min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2},$$

gdzie $\max\{x, y\}$ oznacza większą z liczb x i y , a $\min\{x, y\}$ mniejszą z tych liczb.

(18) Pokaż, że $|a - b - c| \geq |a| - |b| - |c|$

(19) Niech $x = 1,0234107\dots$, $y = 1,0235106\dots$. Czy jest prawdą, że

(a) $1,02 < x \leq 1,03$?

(b) $x + y > 2,04692$?

(c) $x < y$?

(20) Opisz na osi liczb rzeczywistych zbiory

(a) $\{x : |x - 3| < 2\}$,

(b) $\{x : |x - 1| < |x + 1|\}$

(c) $\{x : |a + 1| < |x - a| < |x + 1|\}$.

(21) Rozwiąż następujące równania i nierówności:

(a) $|x + 1| = |x - 1|$,

(b) $|1 - 2x| + |2x - 6| = x$,

(c) $|3x| + 2 \leq |x - 6|$,

(d) $|x^2 - 25| \leq 24$,

(e) $|x| + |x + 1| + |x + 2| = x^2 + 2x + \frac{29}{9}$,

(f) $|x + 10| = |2x + 1| + 3$.

(22) Czy jest prawdą, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność:

(a) $x \leq |x|$,

(b) $-x \leq x$,

(c) $1 \leq |1 + x| + x$,

(d) $-1 \leq |-1 + x| + x$,

(e) $1 \leq |1 - x| + x$,

(f) $-1 \leq |-1 - x| + x$,

(g) $x \leq |x + 1| + 1$,

(h) $-x \leq |-x + 1| + 1$,

(i) $x \leq |x - 1| + 1$,

(j) $-x \leq |-x - 1| + 1$.

(23) Udowodnij następujący wzór:

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + \dots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{2n-1}{4} \cdot 3^n + \frac{1}{4}.$$

(24) Udowodnij następujący wzór:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

(25) Udowodnij następujący wzór:

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1) \cdot 2^n + 1.$$