

# ANALIZA MATEMATYCZNA

## LISTA ZADAŃ 14

21.01.13

- (1) Zbadaj zbieżność podanych wzorami ciągów funkcyjnych, oraz zbieżność jednostajną na podanych zbiorach:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & f_n(x) = \sqrt{x^4 + \frac{x^2}{n}}, \quad (-\infty, \infty), \\
 \text{(b)} & f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}, \quad (-\infty, \infty), \\
 \text{(c)} & f_n(x) = x^n - x^{2n}, \quad [0, 1], \\
 \text{(d)} & f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right), \quad [0, \pi], \\
 \text{(e)} & f_n(x) = \sin^n(x), \quad (-\infty, \infty), \\
 \text{(f)} & f_n(x) = \frac{1}{1 + x + n}, \quad [0, \infty), \\
 \text{(g)} & f_n(x) = \frac{1}{1 + (x + n)^2}, \quad (-\infty, \infty), \\
 \text{(h)} & f_n(x) = \frac{1}{nx}, \quad (0, 1], \\
 \text{(i)} & f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx^2}, \quad [-1, 1], \\
 \text{(j)} & f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}, \quad [-1, 1], \\
 \text{(k)} & f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right), \quad [-1, 1], \\
 \text{(l)} & f_n(x) = nx^{-nx^2}, \quad [-1, 1].
 \end{array}$$

- (2) Wyznacz zbiór, na którym zbieżny jest podany szereg funkcyjny, oraz sprawdź, czy zbieżność jest jednostajna:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-nx^2}, & \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{1 + nx}}, \quad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{10^n}, \\
 \text{(d)} & \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}, & \text{(e)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! x^n}, \quad \text{(f)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + x^2}}, \\
 \text{(g)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2}, & \text{(h)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n, \quad \text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n}, \\
 \text{(j)} & \sum_{n=1}^{\infty} n (\sqrt{x(1-x)})^n, & \text{(k)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad \text{(l)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^2}\right), \\
 \text{(m)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}, & \text{(n)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx).
 \end{array}$$

- (3) Udowodnij, że następujące szeregi funkcyjne są jednostajnie zbieżne na całej prostej  $(-\infty, \infty)$ :

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!}, \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{10^n}, \quad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + n^2}.$$

- (4) Udowodnij, że szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{1 + nx}}$  jest zbieżny jednostajnie na zbiorze  $[0, \infty)$ .

(5) Udowodnij, że szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{n x^n}$  jest zbieżny punktowo, ale nie jednostajnie na zbiorze  $[1, \infty)$ , oraz że jest zbieżny jednostajnie na zbiorze  $[2, \infty)$ .

(6) Znajdź pochodną  $f'$  oraz całkę nieoznaczoną  $\int f(x) dx$  następujących funkcji:

$$(a) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n, \quad (b) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} x^n,$$

$$(c) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n, \quad (d) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

(7) „Zwiń” następujące szeregi potęgowe, to znaczy znajdź wzór na sumę, i określ dziedzinę tak powstałej funkcji:

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^{2n}, \quad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{2n},$$

$$(d) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n, \quad (e) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^n, \quad (f) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(n+2) x^n.$$