

**METODY NUMERYCZNE**  
**ZADANIA NA LABORATORIUM 6**  
**15.05.2014**

- (1) Rozważamy następujący eksperyment mechaniczny przeprowadzony przez Galileusza, kiedy w wolnej chwili badał on spadające ciała. Wyobraźmy sobie, że mamy stół o wysokości 0.778 metra (taki stół miał Galileusz). Na stole umieszczona jest równia pochyła (o ustalonym kącie nachylenia). Galileusz puszczał metalowe kulki po równi pochyłej, zaczynając na wysokości  $h$  (pionowej) nad powierzchnią stołu. Kulka staczała się po równi pochyłej, nabierając prędkości, następnie wytaczała się na stół, zamieniając prędkość wzdłuż równi na prędkość poziomą po powierzchni stołu. W końcu wylatywała z krawędzi stołu i spadała na ziemię. Galileusz mierzył poziomą odległość  $d$ , jaką przebyła kulka od krawędzi stołu do momentu uderzenia w ziemię. Galileusz (podobno) uzyskał następujące pomiary:

| Wysokość startu<br>$h$ (m) | Odległość pozioma<br>$d$ (m) |
|----------------------------|------------------------------|
| 0.282                      | 0.752                        |
| 0.564                      | 1.102                        |
| 0.752                      | 1.248                        |
| 0.940                      | 1.410                        |

- (a) Stosując metodę najmniejszych kwadratów dopasuj prostą  $y = mx + c$  do powyższych danych. Oblicz normę  $(\sum (d_i - (mh_i + c))^2)^{1/2}$ .
- (b) Znajdź analitycznie wzór na  $d$  jako funkcji  $h$  (Galileo nie znał zasad dynamiki, nie mógł więc sam tego zrobić).
- (c) Stosując metodę najmniejszych kwadratów dopasuj krzywą  $y = m\sqrt{x} + c$  do powyższych danych, i oblicz normę residualną, jak w poprzednim punkcie.
- (2) Mamy 4 drużyny piłkarskie, którym chcielibyśmy nadać ranking  $r_1, \dots, r_4$ . Znamy wyniki meczów pomiędzy poszczególnymi drużynami, i chcielibyśmy, żeby ranking odzwierciedlał te wyniki, tzn. żeby różnica rankingów  $r_i - r_j$  była równa różnicy bramek w meczach. Oznaczmy drużyny  $T_1, T_2, T_3$  i  $T_4$ . Wyniki meczów były następujące (tutaj chodzi o futbol amerykański, więc takie wyniki nie są niczym dziwnym).
- $T_1$  pokonała  $T_2$  21 do 17,
  - $T_3$  pokonała  $T_1$  27 do 18,
  - $T_1$  pokonała  $T_4$  16 do 10,
  - $T_3$  pokonała  $T_4$  10 do 17,
  - $T_2$  pokonała  $T_4$  17 do 10.

Zastosuj metodę najmniejszych kwadratów dla znalezienia rankingów  $r_i$ . Zauważ, że rozwiązań jest wiele.

- (3) W tym ćwiczeniu wykorzystamy bazę danych `mnist_all.mat`, która zawiera ręcznie napisane cyfry. Każda cyfra w bazie zapisane jest w postaci obrazu w odcieniach szarości o rozmiarach  $28 \times 28$ . Cyfry są umiejscowione na obrazku w ten

sposób, że środek masy pikseli pokrywa się ze środkiem obrazka. W bazie jest 60000 cyfr *treningowych* i 10000 cyfr *testowych*. Obrazki zapisane są w tablicach `train0, ..., train9` oraz `test0, ..., test9`. Wiersz każdej tablicy reprezentuje jeden obraz, i ma  $28 \times 28 = 784$  współrzędnych (kolejne wiersze obrazka).

- Utwórz macierz  $T$  10 na 784 zawierającą *średnie* cyfry treningowe. Wyświetl te średnie cyfry.
- Najprostszym sposobem identyfikacji cyfry testowej jest porównanie jej pikseli z kolejnymi wierszami  $T$ , i znalezienie wiersza najlepiej przybliżającego badaną cyfrę, powiedzmy w 2 normie.