ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 2

6.10.2014

(1) Znajdź potęgi naturalne liczby $\mathbf{i}$, czyli wyznacz liczby zespolone postaci $\mathbf{i}^n$ dla wszystkich liczb naturalnych n.

(2) Kiedy kwadrat liczby $a + b\,\mathbf{i}$ jest liczbą: a) rzeczywistą, b) ujemną, c) urojoną?

(3) Jakie muszą być argumenty liczb zespolonych z, w, różnych od zera, aby a) iloczyn zw, b) iloraz z/w były rzeczywiste?

(4) Dla danych liczb zespolonych $z = a+b\,\mathbf{i}$ oraz $w = c+d\,\mathbf{i}$ wyznacz: $\Re(z+w), \Im(z+w), \Re(zw), \Im(zw)$, w zależności od a, b, c, d.

(5) Udowodnij następujące własności sprzężenia liczb zespolonych:
 (a) $\overline{(\overline{z})} = z$,
 (b) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$,
 (c) $\overline{(z\,w)} = \overline{z}\,\overline{w}$,
 (d) $\Re(z) = (z + \overline{z})/2, \ \Im(z) = (z - \overline{z})/2\,\mathbf{i}$.

(6) Znajdź moduły liczb zespolonych $z = -2 - 3\,\mathbf{i}$ oraz $z = 1 - \mathbf{i}$.

(7) Udowodnij, że dla dowolnych liczb $z, w \in \mathbf{C}$ mamy następujące własności:
 (a) $|z| \geq 0$ i $|z| = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $z = 0$,
 (b) $|z\,w| = |z|\,|w|$,
 (c) $|z - w| \geq ||z| - |w||$.

(8) Wyznacz geometrycznie (naszkicuj na płaszczyźnie) zbiór $\{z \in \mathbf{C} : |z-1-\mathbf{i}| = 1\}$.

(9) Naszkicuj na płaszczyźnie zbiory liczb $z \in \mathbf{C}$ spełniających nierówności:
 (a) $|z| < 2$, (b) $|z + 3\,\mathbf{i}| < 1$, (c) $|z + 4 - 2\,\mathbf{i}| \leq 3$.

(10) Wyznacz postać trygonometryczną następujących liczb zespolonych:
 (a) $-6 + 6\,\mathbf{i}$, (b) $2\,\mathbf{i}$, (c) $1 + \mathbf{i}$, (d) $2\sqrt{2} + \mathbf{i}$.

(11) Wykonaj działania:
 (a) $\dfrac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$, (b) $\dfrac{2\,\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}$, (c) $\dfrac{4-3\,\mathbf{i}}{4+3\,\mathbf{i}}$.

(12) Udowodnij, że dla $z = r\,(\cos\varphi + \mathbf{i}\,\sin\varphi)$ oraz $z = s\,(\cos\psi + \mathbf{i}\,\sin\psi)$ zachodzi wzór

$$z \cdot w = r \cdot s\,(\cos(\varphi + \psi) + \mathbf{i}\,\sin(\varphi + \psi)).$$

Wywnioskuj, że dla dowolnej liczby $k \in \mathbf{Z}$ mamy wzór

$$z^k = r^k\,(\cos(k\,\varphi) + \mathbf{i}\,\sin(k\,\varphi)).$$

(13) Znajdź wszystkie wartości pierwiastków:
 (a) $\sqrt[4]{1}$, (b) $\sqrt[3]{-1}$, (c) $\sqrt[4]{1+\mathbf{i}}$, (d) $\sqrt[3]{2-2\,\mathbf{i}}$,
 (e) $\sqrt[6]{-27}$, (f) $\sqrt{3+4\,\mathbf{i}}$, (g) $\sqrt[3]{1}$, (h) $\sqrt[3]{\mathbf{i}}$.
 Pokaż ich położenie na płaszczyźnie.

(14) Udowodnij równość $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.

(15) Niech $a, b, c \in \mathbf{C}$ będą dowolne, $a \neq 0$ i niech $d \in \mathbf{C}$ będzie jednym z pierwiastków $\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}$. Udowodnij, że pierwiastki równania $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ są postaci

$$z = \frac{-b \pm d}{2\,a}.$$