

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 8

24.11.14

- (1) Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Korzystając z definicji oblicz $f'(8)$.
 (2) Niech $f(x) = x^5$. Korzystając z definicji wyprowadź wzór na $f'(x)$.
 (3) Niech $n \in \mathbf{N}$. Dobierz stałe a, b, c tak, aby funkcja

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & : |x| \geq 1/n, \\ ax^2 + bx + c & : |x| < 1/n \end{cases}$$

była różniczkowalna. Oblicz pochodną $f'_n(x)$, naszkicuj wykres funkcji $f_n(x)$ oraz wykres pochodnej.

- (4) Oblicz pochodną następujących funkcji. Podaj w jakim zbiorze istnieje pochodna:

- | | |
|--|---|
| (a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1,$ | (b) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right),$ |
| (c) $f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^3},$ | (d) $f(x) = (1 + \sqrt{x})(1 + x^{1/3})(1 + x^{1/4}),$ |
| (e) $f(x) = (x^2 + 1)^4,$ | (f) $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1},$ |
| (g) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1},$ | (h) $f(x) = (1 + 2x)^{30},$ |
| (i) $f(x) = \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)^{1/3},$ | (j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^4 - x^8}},$ |
| (k) $f(x) = 2^{x+3},$ | (l) $f(x) = x10^x,$ |
| (m) $f(x) = \frac{x}{e^x},$ | (n) $f(x) = x^2(x + 1)e^x,$ |
| (o) $f(x) = e^x \log x,$ | (p) $f(x) = \frac{\log x}{e^x},$ |
| (q) $f(x) = e^{x^2},$ | (r) $f(x) = x^{10} \log x,$ |
| (s) $f(x) = e^{e^x},$ | (t) $f(x) = \log \log x,$ |
| (u) $f(x) = \log_{10}(x - 1),$ | (v) $f(x) = 10^{2x-3},$ |
| (w) $f(x) = 2^{3^x},$ | (x) $f(x) = \log_2 \log_3(\log_5 x) ,$ |
| (y) $f(x) = e^{\sqrt{\log x}},$ | (z) $f(x) = x^{x^2},$ |
| (aa) $f(x) = x^{x^x},$ | (ab) $f(x) = x^{\sqrt{x}},$ |
| (ac) $f(x) = (\log x)^x,$ | (ad) $f(x) = e^{-x^2} \log x,$ |
| (ae) $f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10},$ | (af) $f(x) = x^5(x^6 - 8)^{1/3},$ |
| (ag) $f(x) = e^{2x+3} \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right),$ | (ah) $f(x) = \log \frac{1}{1 + x},$ |
| (ai) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}},$ | (aj) $f(x) = x ^3,$ |
| (ak) $f(x) = \operatorname{sgn} x,$ | (al) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ x^2 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases},$ |
| (am) $f(x) = e^{- x },$ | (an) $f(x) = \sqrt{\sqrt{1 + x^2} - 1},$ |

$$\begin{array}{ll}
\text{(ao)} & f(x) = \{x\}, \\
\text{(aq)} & f(x) = \operatorname{sgn}(x^5 - x^3), \\
\text{(as)} & f(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla } x < 0, \\ 1 + x & \text{dla } x \geq 0, \end{cases} \\
\text{(au)} & f(x) = (x + e)^{20},
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\text{(ap)} & f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < 0, \\ x^2 & \text{dla } x \geq 0, \end{cases} \\
\text{(ar)} & f(x) = \frac{\pi^{10}}{\pi - e}, \\
\text{(at)} & f(x) = x^7 + e^2, \\
\text{(av)} & f(x) = e^e.
\end{array}$$

(5) Potrzebna jest kadź w kształcie walca, otwarta od góry, której dno i bok wykonane są z tego samego materiału. Kadź ma mieć pojemność 257 hektolitrów. Jaki powinien być stosunek średnicy dna do wysokości kadzi, aby do jej wykonania zużyć jak najmniej materiału?

(6) Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji określonej podanym wzorem w podanym przedziale:

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & f(x) = x^2 + 2x + 21, \quad [-2, 7], \\
\text{(c)} & f(x) = |x + 1| + x^2, \quad [-10, 10], \\
\text{(e)} & f(x) = \log(x) - \frac{x}{10}, \quad [1, e^3], \\
\text{(g)} & f(x) = x^{1/x}, \quad [2, 4],
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\text{(b)} & f(x) = |x^2 - 1| + 3x, \quad [-2, 2], \\
\text{(d)} & f(x) = |10x - 1| + x^3, \quad [0, 1], \\
\text{(f)} & f(x) = |\sin(x)| + \frac{x}{2}, \quad [0, 2\pi], \\
\text{(h)} & f(x) = 3 \sin(x) + \sin(3x), \quad [0, 2\pi].
\end{array}$$

(7) Oblicz granice:

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right), \\
\text{(c)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}, \\
\text{(e)} & \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}, \\
\text{(g)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}, \\
\text{(i)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}, \\
\text{(k)} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x) - x + 1}{(x - 1)^2}, \\
\text{(m)} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^x},
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\text{(b)} & \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}, \\
\text{(d)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x) + x^2 - 2}{x \sin(x) - x^2}, \\
\text{(f)} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x}, \\
\text{(h)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{e^x} - e}{x}, \\
\text{(j)} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{x - 1}, \\
\text{(l)} & \lim_{x \rightarrow e} \frac{\log \log(x)}{x - e}, \\
\text{(n)} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^x - 4}{x - 2}.
\end{array}$$