Pierwsza litera nazwiska

Egzamin końcowy
1 termin, 5.02.15

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Oblicz całkę:

$$\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx.$$

Rozwiązanie: Całkę liczymy przez części:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx &= \int_0^\pi x^2 (\sin x)' \, dx \\
&= x^2 \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi 2x \, \sin x \, dx \\
&= -2 \int_0^\pi x(-\cos x)' \, dx \\
&= -2\Big(- x\cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \, dx \Big) \\
&= 2(\pi \cos \pi - 0 \cos 0) - 2 \sin x \Big|_0^\pi \\
&= -2\pi.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Znajdź pole figury zawartej pomiędzy krzywą $y = x\,e^{-x^2/2}$ i jej asymptotą (dla $x \geq 0$).

Rozwiązanie: Dla $x \to \infty$ mamy $x\,e^{-x^2/2} \to 0$ (na przykład z de l'Hospitala), a więc asymptotą tej funkcji w $+\infty$ jest prosta $y = 0$. Widzimy więc, że obszar o który chodzi to $\{(x, y); x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x\,e^{-x^2/2}\}$. Jest to obszar nieograniczony, więc jego pole zadane jest całką niewłaściwą:

$$P = \int_0^\infty x\,e^{-x^2/2}\,dx.$$

Sprawdźmy, czy ta całka jest zbieżna. Niech $M > 0$

$$\int_0^M x\,e^{-x^2/2}\,dx = \left\{ \begin{matrix} t = \frac{x^2}{2} \\ dt = x\,dx \end{matrix} \right\} = \int_0^{\frac{M^2}{2}} e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^{\frac{M^2}{2}} = 1 - e^{-\frac{M^2}{2}} \xrightarrow{M\to\infty} 1.$$

Całka niewłaściwa istnieje więc, i jest równa 1.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Znajdź długość łuku krzywej $y = \log(1 - x^2)$, $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

Rozwiązanie: Krzywa ta jest wykresem funkcji $f(x) = \log(1 - x^2)$ dla $x \in [0, \frac{1}{2}]$, więc korzystamy ze wzoru

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Mamy $f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$, więc

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{4\,x^2}{(1-x^2)^2}}\, dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4\,x^2}}{(1-x^2)}\, dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{(1+x^2)^2}}{(1-x^2)}\, dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1+x^2)}{(1-x^2)}\, dx. \end{aligned}$$

Pozostaje policzyć ostatnią całkę, która jest całką funkcji wymiernej. Najpierw piszemy:

$$\frac{(1+x^2)}{(1-x^2)} = \frac{(2+x^2-1)}{(1-x^2)} = \frac{2}{(1-x^2)} - 1,$$

a następnie przedstawiamy pozostały ułamek jako sumę ułamków prostych:

$$\frac{2}{(1-x^2)} = \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}.$$

Obliczamy $A = B = 1$, i w końcu

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - 1\Big)\, dx = \\ &= -\log|1-x|\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \log|1+x|\Big|_0^{\frac{1}{2}} - x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\log\frac{1}{2} + \log\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \log 3 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 1}{x^3 + x}\, dx.$$

Rozwiązanie: Zaczynamy od podzielenia wielomianów:

$$\frac{x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 1}{x^3 + x} = \frac{x^4 + x^2 + x^3 + x - x^2 - x + 4x^2 + 2x + 1}{x^3 + x}$$
$$= x + 1 + \frac{3x^2 + x + 1}{x^3 + x}.$$

Następnie rozkładamy pozostały ułamek na ułamki proste:

$$\frac{3x^2 + x + 1}{x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}.$$

Otrzymujemy $A = C = 1$ oraz $B = 2$. Mamy więc

$$\int \frac{x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 1}{x^3 + x}\, dx =$$
$$= \int \left(x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{2x + 1}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + \log|x| + \int \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx + \int \frac{1}{x^2 + 1}\, dx.$$

Pierwszą z pozostałych całek traktujemy podstawieniem $t = x^2 + 1$ i otrzymujemy

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx = \begin{Bmatrix} t = x^2 + 1 \\ dt = 2x\, dx \end{Bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log(x^2 + 1) + C.$$

Druga z pozostałych całek to $\arctan x$. Mamy w końcu:

$$\int \frac{x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 1}{x^3 + x}\, dx = \frac{x^2}{2} + x + \log|x| + \log(x^2 + 1) + \arctan x + C.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Znajdź pole obszaru zawartego pomiędzy krzywymi $y = \frac{1}{x^2+1}$ oraz $y = \frac{x^2}{2}$.
Rozwiązanie: Obie krzywe znajdują się w górnej półpłaszczyźnie. Sprawdzamy, gdzie się przecinają:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+1} &= \frac{x^2}{2} \\ 2 &= x^4 + x^2 \\ x^4 + x^2 - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Wstawiamy $t = x^2$ i otrzymujemy równanie kwadratowe $t^2 + t - 2 = 0$, które jak łatwo sprawdzić ma dwa rozwiązania $t = -2$ i $t = 1$. Nas interesuje rozwiązanie nieujemne, czyli $t = 1$. Mamy więc $x^2 = 1$ czyli $x = \pm 1$. Zadane krzywe przecinają się nad punktami $x = \pm 1$, a więc obszar zawarty pomiędzy tymi krzywymi leży nad przedziałem $[-1, 1]$. Na tym przedziale krzywa $\frac{1}{x^2+1}$ jest wyżej, co łatwo sprawdzić badając wartości w 0. Pole obszaru wynosi więc:

$$P = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \arctan x \Big|_{-1}^{1} - \frac{x^3}{6} \Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź wartość najmniejszą i największą funkcji

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

Rozwiązanie: Funkcja f jest okresowa o okresie π, a więc wystarczy znaleźć wartości największe i najmniejsze na przedziale $[0, \pi]$. Na obu końcach przedziału mamy $f(0) = f(\pi) = 1$, Policzmy pochodną:

$$f'(x) = 4\sin^3 x \cos x - 4\cos^3 x \sin x = 4 \sin x \cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) = -2\sin 2x \cos 2x.$$

Gdy x przebiega przedział $(0, \pi)$ (końców już nie rozważamy) to $2x$ przebiega przedział $(0, 2\pi)$ w tym przedziale sin zeruje się w punkcie π (czyli $x = \frac{\pi}{2}$), a cos w punktach $\frac{\pi}{2}$ i $\frac{3\pi}{2}$, czyli $x = \frac{\pi}{4}$ i $x = \frac{3\pi}{4}$. Te 3 punkty to punkty krytyczne, w których może występować ekstremum. Mamy $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, $f(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Wartość największa naszej funkcji to 1, a najmniejsza to $\frac{1}{2}$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Oblicz granicę:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+1-e^x}{x\,\sin x}.$$

Rozwiązanie: To jest wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{\infty}{\infty}$ w 0, więc możemy zastosować regułę de l'Hospitala (trzeba ją zastosować dwukrotnie):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+1-e^x}{x\,\sin x} \overset{\text{de l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{\sin x + x\,\cos x} \overset{\text{de l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{\cos x + \cos x - x\,\sin x} = -\frac{1}{2}.$$