Pierwsza litera nazwiska

1

Kolokwium 1
7.11.14

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Rozwiąż równanie

$$|1-2x|+|2x-6|=x^2.$$

Rozwiązanie: Rozważamy 3 przypadki:

- $x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1-2x+6-2x=x^2 \Rightarrow x^2+4x-7=0$. Mamy $\Delta=16+28=44 \Rightarrow$ pierwiastki: $-2 \pm \sqrt{11}$. Widać, że mniejszy pierwiastek wpada do zakresu, a większy nie.
- $\frac{1}{2} < x \leq 3 \Rightarrow 2x-1+6-2x=x^2 \Rightarrow x^2-5=0$, czyli $x=\pm\sqrt{5}$. Tylko $x=\sqrt{5}$ wpada do zakresu.
- $x > 3 \Rightarrow 2x-1+2x-6=x^2 \Rightarrow x^2-4x+7=0$. Mamy $\Delta=16-28=-12$, czyli rzeczywistych pierwiastków nie ma.

W rezultacie otrzymaliśmy 2 rozwiązania: $-2-\sqrt{11}$ i $\sqrt{5}$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Znajdź wszystkie pierwiastki

$$\sqrt[4]{-i},$$

i przedstaw wyniki w postaci $a + i\,b$.

Rozwiązanie: Przedstawiamy $-i$ w postaci trygonometrycznej:

$$-i = \cos\left(\frac{3}{2}\,\pi\right) + i\,\sin\left(\frac{3}{2}\,\pi\right).$$

Wiemy, że 4 pierwiastki stopnia 4 dane są wzorami:

$$z_1 = \cos\left(\frac{3}{8}\,\pi\right) + i\,\sin\left(\frac{3}{8}\,\pi\right)$$
$$z_2 = \cos\left(\frac{7}{8}\,\pi\right) + i\,\sin\left(\frac{7}{8}\,\pi\right)$$
$$z_3 = \cos\left(\frac{11}{8}\,\pi\right) + i\,\sin\left(\frac{11}{8}\,\pi\right)$$
$$z_4 = \cos\left(\frac{15}{8}\,\pi\right) + i\,\sin\left(\frac{15}{8}\,\pi\right).$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Znajdź funkcję odwrotną (wraz z jej dziedziną) do:

$$\sqrt[3]{x^2+2x+2}, \quad x \geq -1.$$

Rozwiązanie: Funkcję możemy zapisać tak:

$$\sqrt[3]{x^2+2x+2} = \sqrt[3]{(x+1)^2+1}.$$

W tej postaci widzimy, że zbiorem wartości są wszystkie liczby ≥ 1, więc taka jest dziedzina funkcji odwrotnej. Rozwiązujemy (dla $y \geq 1$):

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{(x+1)^2+1} \\ y^3 &= (x+1)^2+1 \\ (y^3-1) &= (x+1)^2 \\ \sqrt{y^3-1} &= x+1 \\ \sqrt{y^3-1}-1 &= x. \end{aligned}$$

Funkcją odwrotną jest więc

$$\sqrt{x^3-1}-1, \quad x \geq 1.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Znajdź granicę (być może niewłaściwą) ciągu

$$a_n = \frac{n^2 - 2n - 4}{(2n + (-1)^n \sin n)^2}.$$

Rozwiązanie: Dzielimy licznik i mianownik przez n^2

$$a_n = \frac{n^2 - 2n - 4}{(2n + (-1)^n \sin n)^2} = \frac{1 - \frac{2}{n} - \frac{4}{n^2}}{\left(2 + \frac{(-1)^n \sin n}{n}\right)^2}.$$

Dziwny ciąg w mianowniku traktujemy twierdzeniem o 3 ciągach:

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n \sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Skrajne ciągi dążą do 0, więc ciąg w środku też. W końcu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2n - 4}{(2n + (-1)^n \sin n)^2} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{n} - \frac{4}{n^2}\right)}{\left(\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{(-1)^n \sin n}{n}\right)\right)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Znajdź granicę (być może niewłaściwą) ciągu

$$a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}.$$

Rozwiązanie: Korzystamy z twierdzenia o 3 ciągach:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n} \leq \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n} \leq \sqrt[n]{2\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$\frac{3}{4} \leq \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n} \leq \frac{3}{4}\sqrt[n]{2}.$$

Skrajne ciągi dążą do $\frac{3}{4}$, a więc ciąg w środku też.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{3}{4}.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź granicę (być może niewłaściwą) ciągu

$$a_n = \sqrt[n]{2n^3 - 3n^2 + 15}.$$

Rozwiązanie: Korzystamy z twierdzenia o 3 ciągach:

$$\sqrt[n]{2n^3 - n^3} \le \sqrt[n]{2n^3 - 3n^2 + 15} \le \sqrt[n]{2n^3 + 15n^3}, \qquad n \ge 3.$$

Lewa nierówność wynika z tego, że opuściliśmy 15 oraz zamiast $3n^2$ odjęliśmy n^3. Ale dla $n \ge 3$ mamy $n^3 \ge 3n^2$. Odjęliśmy więc więcej. Prawa nierówność bierze się stąd, że opuściliśmy $-3n^2$, a 15 zwiększyliśmy do $15n^3$. Mamy więc

$$\sqrt[n]{n^3} \le \sqrt[n]{2n^3 - 3n^2 + 15} \le \sqrt[n]{17\,n^3}$$

$$\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 \le \sqrt[n]{2n^3 - 3n^2 + 15} \le \sqrt[n]{17}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3.$$

Skrajne ciągi dążą do 1, a więc ciąg w środku też.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^3 - 3n^2 + 15} = 1.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Udowodnij, że jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \text{ oraz } \lim_{n\to\infty} b_n = g < 0,$$

to

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = -\infty.$$

Rozwiązanie: Z tego, że $a_n \to +\infty$ mamy:

(*) $$\forall\, M \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq n_0 \qquad a_n > M.$$

Potrzebujemy:

$$\forall\, M \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq n_0 \qquad a_n \cdot b_n < M.$$

Wykorzystamy fakt, że b_n są ujemne i oddzielone od 0 (od pewnego miejsca). Sprawdźmy to. $g < 0$, więc niech $\epsilon = -g/2$. Wtedy istnieje $n_1 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geq n_1$

$$b_n - g < \epsilon \;\Leftrightarrow\; b_n < g - g/2 = g/2.$$

Wiemy więc, że $b_n < g/2 < 0$, dla $n \geq n_1$. Niech $M < 0$ będzie dane. ($M \geq 0$ rozważymy później, ten przypadek jest prostszy.) Zastosujmy (*) z $2M/g$ w miejsce M. Mamy więc $n_2 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geq n_2$

$$a_n > \frac{2M}{g}.$$

Teraz niech $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ i $n \geq n_0$. Mamy jednocześnie

$$a_n > \frac{2M}{g} \qquad \text{i} \qquad b_n < \frac{g}{2}.$$

Mnożąc stronami pierwszą nierówność przez b_n (ujemne) dostajemy

$$a_n \cdot b_n < \frac{2M}{g} \cdot b_n < \frac{2M}{g} \cdot \frac{g}{2} = M.$$

Ostatnia nierówność to $b_n < g/2$ pomnożone stronami przez dodatnią liczbę $2M/g$.

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy zadane jest $M \geq 0$. Wystarczy zapewnić $a_n \cdot b_n < 0$. Niech więc n_2 będzie dane przez (*) z 0 w miejsce M. Mamy więc, dla $n \geq n_2$

$$a_n > 0.$$

Ale dla $n \geq n_1$ (ustalone na przykład tak jak wcześniej, dla $\epsilon = -g/2$) $b_n < 0$, czyli dla $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$$a_n \cdot b_n < 0 \leq M.$$