Pierwsza litera nazwiska

1

Kolokwium 3
9.01.15

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Oblicz pochodną następującej funkcji

$$f(x) = x^2\sqrt{1+\sqrt{x}}.$$

Rozwiązanie:

$$f'(x) = 2x \cdot \sqrt{1+\sqrt{x}} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Oblicz granicę:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6(2x)}.$$

Rozwiązanie: Jest to wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{0}{0}$ w 0, więc możemy stosować regułę de l'Hospitala. Stosując tą metodę wprost musimy różniczkować licznik i mianownik wielokrotnie, w dodatku kolejne pochodne mianownika będą coraz bardziej zawiłe. Możemy też skorzystać ze znanej granicy:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^6=1,$$

więc

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6(2x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{(2x)^6}\cdot\frac{(2x)^6}{\sin^6(2x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{64\,x^6}.\end{aligned}$$

Możemy sobie uprościć obliczenia dalej, zauważając, że $x\to 0 \Leftrightarrow x^3\to 0$, więc powyższa granica jest równa

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{64\,x^2}.$$

Ta ostatnia granica da się łatwo obliczyć stosując regułę de l'Hospitala 2-krotnie

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{64\,x^2}\overset{\text{de l'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{128\,x}\overset{\text{de l'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{128}=\frac{1}{128}.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz całkę:

$$\int e^{-x^3}\, x^2\, dx.$$

Rozwiązanie: Stosujemy podstawienie

$$\begin{aligned}
\int e^{-x^3}\, x^2\, dx &= \left\{ \begin{matrix} t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \end{matrix} \right\} \\
&= \int e^{-t}\, \frac{1}{3}\, dt \\
&= -\frac{1}{3}\, e^{-t} + C \\
&= -\frac{1}{3}\, e^{-x^3} + C.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Znajdź najmniejszą i największą wartość danej funkcji na podanym przedziale:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \quad \text{na } [-3, 2].$$

Rozwiązanie: Znajdujemy wartości funkcji na końcach przedziału i w punktach krytycznych

$$\begin{aligned} f(-3) &= 2\,(-3)^3 + 3\,(-3)^2 - 12\,(-3) + 1 \\ &= -54 + 27 + 36 + 1 \\ &= 10, \\ f(2) &= 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 1 \\ &= 16 + 12 - 24 + 1. \end{aligned}$$

$f'(x) = 6\,x^2 + 6\,x - 12$. Szukamy punktów krytycznych. $6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ lub $x = -2$.

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 + 3 - 12 + 1 \\ &= -6 \\ f(-2) &= 2\,(-2)^3 + 3\,(-2)^2 - 12\,(-2) + 1 \\ &- 16 + 12 + 24 + 1 \\ &= 21. \end{aligned}$$

Wartość najmniejsza to -6 a największa to 21.

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Udowodnij, że dla $x > 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{x}{x+1} < \log(1+x).$$

Rozwiązanie: Rozważmy funkcję

$$f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{x+1}.$$

Mamy $f(0) = 0$, oraz

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{1+x}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) > 0. \end{aligned}$$

Pochodna jest więc ściśle dodatnia na przedziale nieskończonym $(0, \infty)$ a więc funkcja jest ściśle rosnąca na domkniętym przedziale nieskończonym $[0, \infty)$. W takim razie dla $x > 0$ mamy $f(x) > f(0) = 0$, a to jest nierówność o którą chodziło.

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz całkę
$$\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}\,dx.$$

Rozwiązanie: Możemy policzyć tą całkę dzieląc licznik przez mianownik jako wielomiany z resztą. Możemy też zrobić proste podstawienie:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}\,dx &= \left\{\begin{aligned} t &= x-1 \\ dt &= dx \end{aligned}\right\} \\
&= \int \frac{(t+1)^4+(t+1)^2+1}{t}\,dt \\
&= \int \frac{t^4+4t^3+6t^2+4t+1+t^2+2t+1+1}{t}\,dt \\
&= \int \frac{t^4+4t^3+7t^2+6t+3}{t}\,dt \\
&= \int (t^3+4t^2+7t+6+\frac{3}{t})\,dt \\
&= \frac{t^4}{4}+\frac{4t^3}{3}+\frac{7t^2}{2}+6t+3\log|t|+C \\
&= \frac{(x-1)^4}{4}+\frac{4(x-1)^3}{3}+\frac{7(x-1)^2}{2}+6(x-1)+3\log|x-1|+C.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Oblicz całkę

$$\int \frac{\log x}{x^3}\,dx.$$

Rozwiązanie: Stosujemy całkowanie przez części:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\log x}{x^3}\,dx &= \int \log x \left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)' dx \\
&= \frac{\log x \big(x^{-2}\big)}{-2} + \frac{1}{2}\int (\log x)'\, x^{-2}\,dx \\
&= \frac{\log x}{-2\,x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^3}\,dx \\
&= \frac{\log x}{-2\,x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) + C \\
&= -\frac{\log x + \frac{1}{2}}{2\,x^2} + C.
\end{aligned}$$