

# ANALIZA MATEMATYCZNA

## LISTA ZADAŃ 2

12.10.2015

- (1) Znajdź potęgi naturalne liczby  $\mathbf{i}$ , czyli wyznacz liczby zespolone postaci  $\mathbf{i}^n$  dla wszystkich liczb naturalnych  $n$ .
- (2) Kiedy kwadrat liczby  $a + b\mathbf{i}$  jest liczbą: a) rzeczywistą, b) ujemną, c) urojoną?
- (3) Jakie muszą być argumenty liczb zespolonych  $z, w$ , różnych od zera, aby a) iloczyn  $zw$ , b) iloraz  $z/w$  były rzeczywiste?
- (4) Dla danych liczb zespolonych  $z = a + b\mathbf{i}$  oraz  $w = c + d\mathbf{i}$  wyznacz:  $\Re(z+w)$ ,  $\Im(z+w)$ ,  $\Re(zw)$ ,  $\Im(zw)$ , w zależności od  $a, b, c, d$ .
- (5) Udowodnij następujące własności sprzężenia liczb zespolonych:
  - (a)  $\overline{\overline{z}} = z$ ,
  - (b)  $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ ,
  - (c)  $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$ ,
  - (d)  $\Re(z) = (z + \overline{z})/2$ ,  $\Im(z) = (z - \overline{z})/2\mathbf{i}$ .
- (6) Znajdź moduły liczb zespolonych  $z = -2 - 3\mathbf{i}$  oraz  $z = 1 - \mathbf{i}$ .
- (7) Udowodnij, że dla dowolnych liczb  $z, w \in \mathbf{C}$  mamy następujące własności:
  - (a)  $|z| \geq 0$  i  $|z| = 0$  wtedy i tylko wtedy gdy  $z = 0$ ,
  - (b)  $|zw| = |z||w|$ ,
  - (c)  $|z - w| \geq ||z| - |w||$ .
- (8) Wyznacz geometrycznie (naskicuj na płaszczyźnie) zbiór  $\{z \in \mathbf{C} : |z - 1 - \mathbf{i}| = 1\}$ .
- (9) Naskicuj na płaszczyźnie zbiory liczb  $z \in \mathbf{C}$  spełniających nierówności:
  - (a)  $|z| < 2$ ,
  - (b)  $|z + 3\mathbf{i}| < 1$ ,
  - (c)  $|z + 4 - 2\mathbf{i}| \leq 3$ .
- (10) Wyznacz postać trygonometryczną następujących liczb zespolonych:
  - (a)  $-6 + 6\mathbf{i}$ ,
  - (b)  $2\mathbf{i}$ ,
  - (c)  $1 + \mathbf{i}$ ,
  - (d)  $2\sqrt{2} + \mathbf{i}$ .
- (11) Wykonaj działania:
  - (a)  $\frac{1 + \mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}}$ ,
  - (b)  $\frac{2\mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}}$ ,
  - (c)  $\frac{4 - 3\mathbf{i}}{4 + 3\mathbf{i}}$ .
- (12) Udowodnij, że dla  $z = r(\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi)$  oraz  $z = s(\cos \psi + \mathbf{i} \sin \psi)$  zachodzi wzór

$$z \cdot w = r \cdot s (\cos(\varphi + \psi) + \mathbf{i} \sin(\varphi + \psi)).$$

Wynioskuj, że dla dowolnej liczby  $k \in \mathbf{Z}$  mamy wzór

$$z^k = r^k (\cos(k\varphi) + \mathbf{i} \sin(k\varphi)).$$

- (13) Znajdź wszystkie wartości pierwiastków:
  - (a)  $\sqrt[4]{1}$ ,
  - (b)  $\sqrt[3]{-1}$ ,
  - (c)  $\sqrt[4]{1 + \mathbf{i}}$ ,
  - (d)  $\sqrt[3]{2 - 2\mathbf{i}}$ ,
  - (e)  $\sqrt[6]{-27}$ ,
  - (f)  $\sqrt{3 + 4\mathbf{i}}$ ,
  - (g)  $\sqrt[3]{1}$ ,
  - (h)  $\sqrt[3]{\mathbf{i}}$ .Pokaż ich położenie na płaszczyźnie.
- (14) Udowodnij równość  $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$ .
- (15) Niech  $a, b, c \in \mathbf{C}$  będą dowolne,  $a \neq 0$  i niech  $d \in \mathbf{C}$  będzie jednym z pierwiastków  $\sqrt{b^2 - 4ac}$ . Udowodnij, że pierwiastki równania  $az^2 + bz + c = 0$  są postaci

$$z = \frac{-b \pm d}{2a}.$$