

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 4

26.10.2015

- (1) Udowodnij nierówność: $2^k < (k+1)!$ dla każdej liczby naturalnej $k \geq 2$.
(2) Udowodnij nierówność Bernoulliego: dla $x > -1$ oraz dowolnego $n \in \mathbf{N}$ zachodzi

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

- (3) Pokaż, że dla $x > 0$ i dowolnego $n \in \mathbf{N}$ zachodzi

$$(1+x)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

- (4) Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbf{N}$ zachodzą równości

$$(a) \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

$$(b) \quad \sum_{\substack{k=1 \\ k\text{-nieparzyste}}}^n \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k\text{-parzyste}}}^n \binom{n}{k}.$$

- (5) Pokaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{2n}{n} < 4^n$.

- (6) Udowodnij, że dla dowolnej liczby $a \in \mathbf{R}$ lub $a \in \mathbf{C}$ spełniającej warunek $|a| < 1$ jest $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$.

- (7) Oblicz granice:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

- (8) Znajdź granice ciągów:

$$(a) a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}, \quad (b) a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}.$$

- (9) Dla jakich liczb rzeczywistych α istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n + n^\alpha} - \sqrt[3]{n}.$$

Oblicz granicę dla tych α dla których istnieje.

- (10) Oblicz granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}.$$

- (11) Oblicz granice ciągów:

$$(a) a_n = \frac{\sin^2 n}{n}, \quad (b) a_n = \sqrt[n]{\log n},$$

$$(c) a_n = \frac{1}{n^2} \log \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right).$$

- (12) Udowodnij, że jeżeli $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ to ciąg wartości bezwzględnych $\{|a_n|\}$ też jest zbieżny, oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |g|.$$

Pokaż też, że powyższe twierdzenie nie działa w drugą stronę, to znaczy znajdź ciąg $\{a_n\}$ który nie jest zbieżny, chociaż $\{|a_n|\}$ jest zbieżny.

(13) Udowodnij, że jeżeli $|a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ to $\{a_n\}$ też jest zbieżny do 0.

(14) Udowodnij, że jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny i $a_n \geq 0$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0.$$

(15) Udowodnij, że jeżeli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ spełniają $a_n \leq b_n$ i są zbieżne, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

(16) Ciąg a_n dany jest następująco: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, oraz

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Pokaż, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}.$$

(17) Pokaż, że jeżeli $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ oraz ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

(18) Pokaż, że jeżeli $a_n > 0$ dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$, oraz $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$$

(granica niewłaściwa).

(19) Dany jest ciąg $\{b_n\}$, o którym wiemy, że

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall n \geq 10/\epsilon \quad |b_n + 2| < \epsilon.$$

Wskaż M takie, że

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |b_n| < M,$$

n_1 takie, że

$$\forall n \geq n_1 \quad b_n < 0,$$

n_2 takie, że

$$\forall n \geq n_2 \quad b_n > -3,$$

oraz n_3 takie, że

$$\forall n \geq n_3 \quad |b_n - 2| > \frac{1}{10}.$$

(20) Niech $a_n = \frac{\sqrt{n^2 + n}}{n}$ oraz $\epsilon = \frac{1}{100}$. Znajdź $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że dla $n \geq n_0$ zachodzi $|a_n - 1| < \epsilon$.