

ANALIZA FUNKCJONALNA 2

LISTA ZADAŃ 1

29.02.2016

- (1) Pokaż, że jeżeli operator liniowy T z przestrzeni Banacha X w przestrzeń Banacha Y jest ograniczony, to T przekształca ciągi słabo zbieżne do zera w X w ciągi słabo zbieżne do zera w Y . Pokaż, że implikacja odwrotna też jest prawdziwa.

Wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia o wykresie domkniętym.

- (2) Podprzestrzeń Y przestrzeni unormowanej X nazywamy niezmienniczą dla operatora liniowego $T : X \rightarrow X$ jeżeli $T(Y) \subset Y$. Znajdź podprzestrzenie niezmiennicze operatora przesunięcia S określonego na ℓ^2 wzorem

$$S(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, x_2, \dots).$$

- (3) Dla $X = C[0, 1]$ i $g \in X$ określamy operator $T : X \rightarrow X$ wzorem $Tf(x) = g(x) \cdot f(x)$ (mnożenie punktowe przez funkcję g). Pokaż, że operator T jest ograniczony. Znajdź $\sigma(T)$.
- (4) Rozwiąż poprzednie zadanie dla $X = L^2[0, 1]$ oraz $g \in C[0, 1]$.
- (5) Operator $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ jest określony wzorem $(Tx)_n = \lambda_n x_n$, gdzie λ_n jest ustalonym ciągiem ograniczonym. Znajdź $\sigma(T)$ oraz $\sigma_p(T)$.
- (6) Korzystając z poprzedniego zadania pokaż, że dla dowolnego zwartego zbioru $K \subset \mathbb{C}$ istnieje operator $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$, którego spektrum jest równe K .
- (7) Niech $T : \ell^p \rightarrow \ell^p$, $1 \leq p \leq \infty$, będzie określony wzorem

$$T(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Znajdź spektrum T .

- (8) Udowodnij, że dla operatora $T \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ na przestrzeni Hilberta $\mathbb{H}$ mamy

$$\|T\|^2 = \|T^*\|^2 = \|TT^*\| = \|T^*T\| = \sup_{\|x\|=1} \langle T^*Tx, X \rangle = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \langle Tx, Ty \rangle.$$

- (9) Oblicz transformatę Laplace'a funkcji $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$.
- (10) Udowodnij, że jeżeli Y nie jest zupełna a X jest nietrywialna ($X \neq \{0\}$), to $\mathcal{B}(X, Y)$ też nie jest zupełna.
- (11) udowodnij, że jeżeli $Tx = Sx$ dla x z pewnego zbioru liniowo gęstego, oraz oba operatory są ograniczone, to $T = S$.
- (12) Niech T będzie ciągłym odwzorowaniem addytywnym (czyli $T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2$) pomiędzy dwoma przestrzeniami liniowymi rzeczywistymi. Udowodnij, że T jest liniowe. Czy podobny fakt można udowodnić dla przestrzeni zespolonych?
- (13) Czy jeżeli operator liniowy przekształca ciągi zbieżne do 0 w ciągi ograniczone to musi być ograniczony?
- (14) Niech $e_n = (0, \dots, 1, 0, \dots)$ oznacza zwykłą bazę w ℓ^1 , a $\{x_n\}$ będzie ograniczonym ciągiem w pewnej przestrzeni Banacha X . Wtedy istnieje dokładnie jeden operator $T \in \mathcal{B}(\ell^1, X)$ taki, że $Te_n = x_n$, $n = 1, 2, \dots$. Pokaż, że istnieje operator liniowy nieograniczony $S : \ell^1 \rightarrow X$ taki, że $Se_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$.

(15) Operator $A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ jest dany przez macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & i \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oblicz normę A , obiema poznanymi na wykładzie metodami.

(16) Rozważmy macierz nieskończoną o współczynnikach $a_{j,k} = \frac{1}{j+k-1}$, $j, k = 1, 2, \dots$. Ta macierz definiuje operator liniowy H na przestrzeni ciągów $x = (x_1, x_2, \dots)$, wzorem

$$H(x)_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} x_k.$$

Udowodnij, że H jest ograniczony na ℓ^2 .