

ANALIZA FUNKCYJONALNA 2

LISTA ZADAŃ 1

3.04.2016

1. Rozwiąż równanie różniczkowe

$$x'(t) = x(t) + f(t),$$

gdzie f jest ustaloną funkcją z $C(0, 1)$

Wskazówka: Zamień równanie różniczkowe na całkowe. Pojawi się operator Volterry.

2. Niech X będzie przestrzenią Banacha, a $T \in \mathcal{B}(X)$. Zdefiniujmy

$$\exp(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!}.$$

Udowodnij, że $\exp(T) \in \mathcal{B}(X)$, i że jest odwracalny. Czy zachodzi

$$\exp(S + T) = \exp(S) + \exp(T) ?$$

Czy można sformułować jakieś warunki na S, T żeby to zachodziło?

3. Niech T będzie ograniczonym operatorem na przestrzeni Hilberta $\mathbb{H}$. Pokaż, że
- (a) T jest różnowartościowy $\Leftrightarrow$ obraz T^* jest gęsty;
 - (b) T^* jest różnowartościowy $\Leftrightarrow$ obraz T jest gęsty;
 - (c) Jeśli T jest “na”, to istnieje $S : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ taki, że $TS = I$ (i, oczywiście, vice versa);
 - (d) T ma domknięty obraz $\Leftrightarrow T^*$ ma domknięty obraz.
4. Dla $T, S \in \mathcal{B}(X)$ oraz $\lambda \notin \sigma(T) \cup \sigma(S)$ udowodnij, że

$$R_\lambda(T) - R_\lambda(S) = R_\lambda(S)(T - S)R_\lambda(T).$$

($R_\lambda(Q) = (\lambda I - Q)^{-1}$ to rezolwenta operatora Q .)

5. Oblicz normę operatora T określonego wzorem

$$Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^1 f(y) dy.$$

w przestrzeni $L^2(0, 1)$. Znajdź operator sprzężony. Pokaż, że istnieje ciąg funkcji $f_n \in L^2(0, 1)$ taki, że $f_n \rightarrow 0$ słabo, ale $\|Tf_n\|$ nie dąży do 0.

Wskazówka: Zauważ, że

$$Tf(x) = \int_0^1 f(xy) dy.$$

Skorzystaj z nierówności

$$\left(\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x, y) dy \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 g(x, y)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dy$$

Jako przykład ciągu funkcji rozważ funkcje $f(x) = x^\alpha$ dla $\alpha \rightarrow -\frac{1}{2}^+$.

6. Niech T będzie operatorem na $L^2(0, 1)$ takim, że wymiar obrazu T^* jest skończony. Pokaż, że istnieje funkcja $K(x, y) \in L^2((0, 1) \times (0, 1))$ taka, że

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy.$$

Wskazówka: Niech $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ będzie bazą ortonormalną obrazu T^* . Zauważ, że funkcja

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^n T(\varphi_i)(x)\overline{\varphi_i(y)}$$

jest dobra.